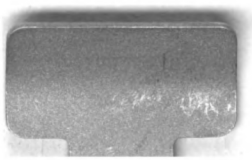
Math. P. 635 n



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Lehrbuch

der

elementaren Stereometrie

und

darstellenden Geometrie

zum

Gebrauche beim Unterricht in Gewerbsschulen, Gymnasien ꝛc. ꝛc.

von

Dr. Adam Weiß,

Professor der höheren Mathematik und Physik an der kgl. polytechnischen Schule zu Nürnberg.

Ansbach, 1854.

Verlag von E. H. Gummi.

Druck der Brügel'schen Officin.

Digitized by Google

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Digitized by Google

Vorrede.

Während der achtjährigen Dauer eines Lehramts in dem Unterrichtsgegenstand, den das vorliegende Buch begreift, suchte ich meinen Schülern, bei möglichster Gründlichkeit, eine gewisse Geläufigkeit in der Kenntniß von der Lage der Geraden und Ebenen im Raume beizubringen. Hiezu aber waren mir weit mehr Sätze nöthig, als deren in den gewöhnlichen Lehrbüchern vorkommen; die hiedurch nothwendig gewordene Ausdehnung des Lehrstoffes erheischte aber anderseits eine eigenthümliche Zusammenstellung der Sätze und ihrer Beweise und so entstand dieses Büchlein nach und nach von selbst. Da ich mich nun der Anerkennung der Erreichung des vorgesteckten Zieles, so weit letztere aus den sich bei den alljährlich angeordneten Prüfungen ergebenden Resultaten von Seite der Allerhöchst hiezu bestellten Ministerialcommissäre durchgängig erfreuen durfte und weil ich von mehreren beachtungswerthen Sachkennern aufgefordert wurde, die von mir befolgte Methode zu veröffentlichen, so wage ich es hiemit bei meinem Scheiden vom Lehramt der elementaren Mathematik, das mir zuletzt neben dem Rektorate an der k. Gewerbsschule in Ansbach anvertraut war, das Buch zwar schüchtern doch vertrauungsvoll dem Publikum vorzulegen.

Die ersten fünf Kapitel, welche sich mit der Lage der Geraden und Ebenen im Raum beschäftigen, enthalten, wie eine einfache Durchsicht der Sätze ergeben wird, von letztern eine weit größere Zahl, als sich in einem andern (mir wenigstens bekannten) Lehrbuch der Stereometrie vor-

Digitized by Google

findet; dessenungeachtet nehmen sie nur den Raum von zwei und einem halben Druckbogen ein und es dürfte wegen der ihnen zumeist eigenthümlichen Art des Beweises kaum mehr Zeit zur Erlernung dieses so wichtigen Theils der Stereometrie, als es sonst geschieht, zugewiesen werden. Damit aber das Lehrbuch dem Schüler noch Gelegenheit zum Selbstdenken übrig lasse, sind wenigstens die einfachern Beweise allgemein gehalten und sollen von den Schülern an einer Figur besonders als Hausaufgabe bearbeitet werden.

Das sechste Kapitel beschäftigt sich in großer Ausführlichkeit mit der Lehre vom Dreikant. Seine Sätze sollen die Beziehungen der Winkel von Geraden und ihrer sie enthaltenen Ebenen, die man sonst in der angewandten Mathematik immer häufig noch erst mittelbar mit Hülfe des sogenannten sphärischen Dreiecks zur Anschauung bringt, vollständig darbieten, und so das letztere mit Fug und Recht da, wo von einer Kugel nicht die Rede zu sein braucht, ersetzen und verdrängen. Insbesondere glaube ich den zweideutigen Fall klar und übersichtlich dargestellt zu haben. Die Lehre vom regelmäßigen Körpervieleck schließt sich leicht an die des körperlichen Dreiecks an.

Im zweiten Theile, der sich mit den geschlossenen Körperräumen befaßt, ging ich von dem Obelisken, dessen Begriff ich etwas erweiterte, aus und betrachtete die pyramidalen und prismatischen Körper als Specialitäten davon. Obwohl ich mich hierauf nicht über Gebühr mit der Congruenz und Aehnlichkeit dieser Körper abgab, glaube ich alles Nöthige und Wichtige aufgeführt zu haben. In die Lehre von den runden Körpern mußte ich, als zum Abschluß der elementaren Stereometrie nothwendig gehörig, auch den Begriff der Berührungsebene aufnehmen.

Bei den Inhaltsberechnungen, die ich wieder, wie leicht ersichtlich, ihrer technischen Wichtigkeit wegen, in ganz ausgedehntem Maaße durchnahm, ging ich von dem seltsamer Weise anderwärts noch nicht in die Elemente aufgenommenen äußerst fruchtbaren **Chapmannschen Satz** aus. Um die Anwendbarkeit desselben auf den Obelisken zu zeigen, mußte ich allerdings einen Satz aus der Trigonometrie

Digitized by Google

entlehnen. Sollte dies einem oder dem andern Herrn Collegen unstatthaft erscheinen, so wird es ihm leicht sein doch seine Anwendbarkeit auf Prismen und Pyramiden blos mit Hülfe des Vorhergehenden nachzuweisen.

Die Beispielsammlung des Kapitel VI. dürfte gewiß jedem Lehrer willkommen sein. In Kapitel VII. sind verschiedene interessante Aufgaben besonders deßhalb gegeben worden, damit sie als Norm zur Einkleidung in Worten der im vorhergehenden Kapitel enthaltenen Aufgaben dienen.

Eine besondere Rechtfertigung bedarf es, daß ich auch die elementare darstellende Geometrie mit in das Bereich der Betrachtung zog, zumal als der Titel das Buch sogar auch Schülern von Gymnasien vindicirt. Allein von jeher war ich so sehr vom Gedanken durchdrungen, daß dieser Theil so wenig von der Stereometrie getrennt werden darf und kann, als die planimetrische Constructionslehre von der Planimetrie, daß ich nicht anders konnte. Allerdings mußte die darstellende Geometrie nach einer anderen Methode als bisher gelehrt werden. Durch die von mir hier befolgte rechtfertigt sich aber gewiß bei allen Sachkennern mein Wagniß, insbesondere als es mich bedünken möchte, daß sie eine der darstellenden Geometrie selbst naturgemäßere und ihrem Zwecke entsprechendere ist. Daß dabei die Behandlung nicht weitläufiger, sondern weit kürzer als die bisher gewöhnliche geworden ist, dürfte schon aus dem Grunde geschlossen werden, daß ich neben allen anderwärts behandelten Aufgaben noch viele neue auf nicht ganz drei Druckbogen bei gewiß zureichender Erklärung und Beweisführung durchnahm.

Den von mir gebrauchten Namen „Riß“ anstatt „Projection“ entnahm ich meinem nunmehrigen Collegen und Freunde Herrn Prof. Klingenfeld, dessen Werk: „Lehrbuch der darstellenden Geometrie für polytechnische Schulen, Nürnberg bei Bauer und Raspe 1852“ ich als ein mir vorzüglich erscheinendes allen jenen zu empfehlen Gelegenheit nehme, die die darstellende Geometrie (von da, wo vorliegendes aufhört, fängt jenes an) weiter zu führen entschlossen sind.

Digitized by Google

Indem ich schließlich auf das ausführliche Inhaltsverzeichniß als ein beim Unterricht wohl zu schätzendes Lehrmittel hinzeige, empfehle ich das Werk einer billigen Beurtheilung und entsprechenden Werthschätzung verehrter Amtsgenossen, denen ich durch dasselbe eine kleine Unterstützung in ihrem Bemühen zu gewähren bestrebt war. —

Für den Fall, daß drei bis vier Wochenstunden an den Gewerbsschulen und Gymnasien dem Lehrstoffe zugewiesen sind, und daß dann, zur Vermeidung des Zeitverlustes mit Dictiren, jeder Schüler das Werk (aus diesem Grund auch seine gewiß anzuerkennende Wohlfeilheit!) selbst in Händen habe, dürfte folgendes eine zweckgemäße Vertheilung auf die Lehrzeit sein. **Erster und zweiter Monat:** Kapitel I. bis V. **Dritter Monat:** Kap. VI. u. dritter Theil Kap. I. **Vierter Monat:** Zweiter Theil Kap. I. u. II. und dritter Theil Kap. II. **Fünfter Monat:** Zweiter Theil Kap. III. und dritter Theil Kap. III. **Sechster und siebenter Monat:** Zweiter Theil Kap. IV. u. V. Dritter Theil Kap. IV. u. V. Die **letzten drei Monate** verwende man auf Repetitionen und Auflösen von Aufgaben.

Digitized by Google

Inhalt.

Erster Theil.

Kapitel I.

		Seite.
§. 1.	Geometrie und Stereometrie, Eintheilung der letztern	1
§. 2.	Entstehung der geometrischen Gebilde	2
§. 3.	Von den zwei verschiedenen Seiten derselben	2
§. 4.	Von der Geraden	2
§. 5.	Gegenseitige Lage zweier Geraden	3
§. 6.	Durch einen Punkt kann man sich unzählig viele Geraden gelegt denken	3
§. 7.	Durch einen Punkt kann nur eine Gerade gedacht werden, die zu einer andern parallel ist	3
§. 8.	Von der Ebene	3
§. 9.	Durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, ist die Lage einer Ebene bestimmt	3
§. 10.	Eine Gerade fällt mit einer Ebene zusammen, wenn sie mit ihr einen Punkt im Endlichen gemein hat und zu einer Geraden der Ebene parallel ist	4
§. 11.	Definition einer zu einer Ebene parallelen Geraden	4
§. 12.	Eine Gerade und Ebene schneiden sich, wenn sie einen Punkt im Endlichen gemein haben	4
§. 13.	Eine Gerade, die zwei Punkte auf verschiedenen Seiten einer Ebene verbindet, schneidet die Ebene	4
§. 14.	Durch einen Punkt kann man unzählig viele Geraden einer Ebene parallel legen	4
§. 15.	Die Lage einer Ebene ist bestimmt: a. durch einen Punkt und eine Gerade, b. durch zwei sich schneidende und c. durch zwei parallele Geraden	5
§. 16.	Durch zwei sich kreuzenden Geraden kann keine Ebene gelegt werden	5

Digitized by Google

Seite.

§. 17. Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie keinen Punkt im endlichen Raum gemein haben 5

§. 18. Zwei Ebenen, die nicht willkührlich begränzt sind, haben, wenn sie einen Punkt mit einander gemein haben, auch eine durch den Punkt gehende Gerade gemein 6

§. 19. Durch eine Gerade kann man unzählig viele Ebenen legen . 6

§. 20. Eine Ebene, welche durch eine Gerade gelegt ist, die eine zweite Ebene schneidet, schneidet die letztere 6

§. 21. Wenn eine Gerade parallel zu einer Ebene ist und man legt durch sie eine zweite Ebene, welche die erste schneidet, so schneiden sich beide Ebenen in einer zur ersten Geraden parallelen Kante 6

§. 22. Eine Ebene und eine außer ihr liegende Gerade schneiden sich oder sind parallel; ein dritter Fall ist unmöglich 7

§ 23. Zwei Ebenen schneiden sich oder sind parallel; ein dritter Fall ist unmöglich 7

§. 24. Eine Gerade und eine Ebene sind gegeben, durch erstere werden beliebig viele neue Ebenen gelegt, welche die zweite schneiden, dann sind die entstehenden Schnittlinien unter sich parallel, wenn die Gerade zur Ebene parallel ist, oder sie schneiden sich, wenn die Gerade die Ebene schneidet und zwar alle in dem Schnittpunkt der letzteren 7

§. 25. Wenn sich zwei Ebenen schneiden und man zieht in jeder Ebene eine Gerade parallel zur Kante, so sind die Geraden unter sich selbst parallel 7

§. 26. Wenn zwei Geraden zu einer dritten parallel sind, so sind sie unter sich parallel 7

§. 27. Zwei unter sich parallele Ebenen bilden mit einer dritten sie schneidenden Ebene parallele Schnittlinien 8

§. 28. Zwei Ebenen, die mit einer dritten Ebene parallel sind, sind unter sich parallel 8

§. 29. Zwei Ebenen, die zu einer dritten parallel sind und einen Punkt im endlichen Raum gemein haben, fallen zusammen . . 8

§. 30. Sämmtliche Geraden, die durch einen Punkt gehen und zu einer Ebene parallel laufen, liegen in einer zur letztern parallelen Ebene 8

Aufgaben zu Kapitel *I.*

§. 31. Durch einen Punkt eine Ebene legen, die zu einer gegebenen Geraden parallel ist 8

§. 32. Durch einen Punkt eine Ebene legen, die zu einer gegebenen Ebene parallel ist 9

§. 33. Durch einen Punkt eine Ebene legen, die zu zwei Geraden parallel ist 9

§. 34. Durch eine Gerade eine Ebene legen, die zu einer andern Geraden parallel ist 9

§. 35. Durch eine Gerade eine Ebene legen, die zu einer andern Ebene parallel ist 9

Kapitel *II.*

§. 36. Vom Winkel zweier Geraden und dem Senkrechtsein derselben 10

§. 37. Zwei Paare sich schneidender Geraden, von denen je eine des

Digitized by Google

Seite.

einen Paars parallel ist zu einer des andern, bilden gleiche Winkel unter sich und die Winkelebenen sind zu einander parallel 10
§. 38. Vom Winkel zweier sich kreuzenden Geraden . . . 11
§. 39. Von einem Punkt außerhalb einer Geraden kann man nur eine sie schneidende zweite Gerade ziehen, die auf ersterer senkrecht steht 11
§. 40. Entfernung zweier Geraden in eine Ebene 11
§. 41. In einem Punkt einer Geraden kann man unzählig viele Senkrechte auf sie errichten 11
§. 42. Eine Gerade, die zu einer andern senkrecht ist, ist auch senkrecht zu jeder dritten, die zur zweiten parallel läuft . . 12
§. 43. Wenn eine Gerade im Schnittpunkt zweier Geraden auf ihnen senkrecht steht, so steht sie auch auf jeder dritten Geraden, die in der Ebene der erstern liegt und durch den Schnittpunkt geht, senkrecht 12
§. 44. Sie steht auch senkrecht auf jeder andern Geraden der genannten Ebene 12
§. 45. Wenn eine Gerade auf zwei beliebigen Geraden einer Ebene senkrecht steht, so steht sie auf allen Geraden der letztern senkrecht und heißt senkrecht zur Ebene 13
§. 46. Durch einen Punkt kann man nur eine Senkrechte zu einer Ebene legen 13
§. 47. Durch einen Punkt kann man nur eine Ebene zu einer Geraden senkrecht legen 13
§. 48. Alle Geraden, die in einem Punkt einer Geraden auf letzterer senkrecht stehen, liegen in einer Ebene 13
§. 49. Zu einer Geraden, die gegen eine Ebene schräg steht, findet man in letzterer immer eine andere Gerade, die zur erstern senkrecht steht 14
§. 50. Werden die Schnittpunkte eines Perpendikels und einer Schrägen zu einer Ebene in dieser mit einander durch eine Gerade verbunden, so steht die Verbindungsgerade auf der zur Schrägen gehörigen, in der Ebene liegenden senkrechten Geraden dann senkrecht, wenn sich Perpendikel und Schräge schneiden . . 14
§. 51. Umgekehrt, wenn die Verbindungslinie der Schnittpunkte einer Schrägen und eines Perpendikels auf einer Geraden der Ebene senkrecht steht, so ist diese Gerade die zur Schrägen gehörige Senkrechte in der Ebene, vorausgesetzt, daß Schräge und Perpendikel außer der Ebene sich schneiden 14
§. 52. Wenn eine von zwei parallelen Geraden zu einer Ebene senkrecht ist, so ist es auch die andere 14
§. 53. Zwei Geraden, die auf einer Ebene senkrecht stehen, sind parallel 15
§. 54. Von einem Punkt außerhalb ist der Weg zu einer Ebene auf dem Perpendikel kürzer als auf jeder Schrägen zu dieser und auf einer Schrägen, die ihren Schnittpunkt näher als eine andere Schräge beim Fußpunkt des Perpendikels hat, kürzer als auf der zweiten Schrägen. Zwei Schräge, deren Schnittpunkte vom Fußpunkt gleichweit entfernt sind, sind gleich . 15
§. 55. Eine Gerade, die auf einer Ebene senkrecht steht, ist auch senkrecht zu einer zweiten Geraden, die zur Ebene parallel läuft 15
§. 56. Sämmtliche Punkte einer Geraden, die zu einer Ebene parallel ist, haben gleiche Entfernung zu letzterer 16
§. 57. Eine Gerade, welche auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht ist, ist es auch auf der andern 16

Digitized by Google

		Seite
§. 58.	Wenn eine Gerade auf zwei Ebenen senkrecht steht, so sind letztere parallel	16
§. 59.	Zwei parallele Ebenen haben in allen Punkten gleiche Entfernung von einander	16
§. 60.	Wenn von zwei sich schneidenden Ebenen erstere einen Perpendikel zur andern enthält, so hat auch die zweite einen Perpendikel zur ersten und jede Gerade der einen Ebene, welche zum Durchschnitt senkrecht ist, ist auch zur andern Ebene senkrecht; die beiden Ebenen selbst werden senkrecht auf einander genannt	16
§. 61.	Wenn zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen, so liegt eine Gerade, die durch einen Punkt der ersten geht und auf der andern Ebene senkrecht steht, in ersterer Ebene	17
§. 62.	Zwei sich kreuzende Geraden haben in verschiedenen Punkten verschiedene Entfernung zu einander; ferner gibt es eine, aber auch nur eine Gerade, die auf beiden senkrecht steht und sie gleichzeitig schneidet und die Länge dieses ihren gemeinsamen Perpendikels zwischen den zwei Schnittpunkten ist die kürzeste Entfernung der beiden Geraden	17

Aufgaben zu Kapitel *II.*

§. 63.	Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, die auf einer gegebenen senkrecht steht	18
§. 64.	Eine Ebene soll gefunden werden, die durch eine gegebene Gerade geht und auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht	18
§. 65.	Einen Punkt finden, der von einer Ebene eine bestimmte Entfernung hat	18
§. 66.	Eine Gerade finden, die zu einer gegebenen Geraden parallel geht und eine bestimmte Entfernung zu ihr hat	18
§. 67.	Eine Gerade finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, eine zweite Gerade schneidet und einen bestimmten Winkel mit ihr macht	19
§. 68.	Einen Punkt zu finden, der von einem gegebenen Punkt einen bestimmten Abstand hat	19
§. 69.	Eine Ebene finden, die zu einer Geraden parallel läuft und eine bestimmte Entfernung zu ihr hat	19

Kapitel *III.*

§. 70.	Vom Winkel zweier sich schneidenden Ebenen	20
§. 71.	Vom Linienwinkel des Ebenenwinkels	20
§. 72.	Zwei Ebenenwinkel, die einander gleich (congruent) sind, haben gleiche Linienwinkel	20
§. 73.	Wenn zwei Ebenenwinkel gleiche Linienwinkel haben, so sind sie congruent	20
§. 74.	Zwei Ebenenwinkel verhalten sich wie ihre Linienwinkel	21
§. 75.	Ein Ebenenwinkel hat so viele Grade, als sein Linienwinkel	21
§. 76.	Wenn sich zwei Ebenen schneiden, so bilden sich wie bei zwei sich schneidenden Geraden vier Winkel	22
§. 77.	Wenn zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen, so bilden sie rechte Winkel, da die Linienwinkel rechte sind, wie aus §. 60 leicht zu folgern ist	22

Digitized by Google

Seite.

§. 78. Zwei parallele Ebenen, geschnitten von einer dritten, bilden an den beiden parallelen Kanten mit der dritten jedesmal vier Winkel 22

§. 79 u. 80. Von den Winkeln einer Schrägen mit verschiedenen Geraden in ihrer Ebene, sowie von denjenigen, welche verschiedene Ebenen, die durch die Schräge gelegt werden, mit der Ebene machen . . . . . 23—26

§. 81. Wenn zwei Schrägen durch einen Punkt einer Ebene gehen, auf der nämlichen Seite derselben liegen, und gemeinschaftlichen Riß haben, so macht diejenige, welche zur Ebene die größere Neigung hat, auch mit einer beliebigen Gerade der Ebene einen größeren Winkel 26

§. 82. Wenn eine von zwei sich schneidenden Geraden auf einer Ebene senkrecht steht, so macht die andere mit der Ebene einen Winkel, der zum Winkel der Geraden complementar ist . . 26

§. 83. Wenn eine von zwei sich schneidenden Ebenen auf einer Geraden senkrecht steht, so macht die andere Ebene mit der Geraden einen Winkel, der zum Ebenenwinkel complementar ist . 27

§. 84. Wenn in einem Punkt der Kante zweier sich schneidenden Ebenen auf diese zwei Perpendikel gefällt werden, so machen die Stücke der Perpendikel, welche jedesmal auf der Außenseite der ihnen zugehörigen Ebene liegen, einen Winkel, der zu dem Winkel der Ebene selbst supplementär ist . . . 27

Aufgaben zu Kapitel *III.*

§. 85. Eine Ebene und eine Schräge ist gegeben; man soll in der Ebene eine Gerade ziehen, die mit der Schrägen einen bestimmten Winkel macht 27

§. 86. Durch eine Gerade eine Ebene legen, die zu einer gegebenen Ebene unter einem bestimmten Winkel geneigt ist . . 28

§. 87. Durch einen Punkt eine Gerade legen, die eine gegebene Ebene unter einem bestimmten Winkel schneidet 30

§. 88. Ein Punkt und eine Gerade ist gegeben, durch den Punkt eine Ebene zu legen, die mit der Geraden einen bestimmten Winkel macht 30

Kapitel *IV.*

§. 89. Verschiedene Arten der Erzeugung einer Ebene durch die Bewegung einer Geraden 30

§. 90. Drei Ebenen schneiden sich entweder in einer Geraden, die dann allen drei gemeinsam ist, oder in zwei oder in drei parallelen Geraden, oder in drei sich in einen Punkt, der allen drei Ebenen gemein ist, schneidenden Geraden . . 31

§. 91. Wenn sich zwei Ebenen schneiden und es läuft eine Gerade der einen Ebene parallel zur andern, so ist die Gerade parallel zur Schnittlinie 31

§. 92. Eine Gerade, die von einer Ebene in zwei Punkten gleiche Entfernung hat, ist zur Ebene parallel 31

Digitized by Google

		Seite.
§. 93.	Eine Ebene, die von einer andern in drei Punkten, die nicht in einer Geraden liegen, gleich weit entfernt ist, ist zur andern parallel	31
§. 94.	Zwei parallele Geraden machen mit einer gegebenen Ebene gleiche Winkel	32
§. 95.	Zwei Ebenen, welche gleiche Winkel machen mit einer dritten Ebene, sind parallel, wenn ihre Schnittlinien parallel sind	32
§. 96.	Bei zwei sich schneidenden Ebenen ist der Linienwinkel der größte Winkel, den eine Gerade der einen Ebene mit der andern Ebene machen kann	32
§. 97.	Die Stücke zweier Geraden zwischen drei sich schneidenden parallelen Ebenen haben gleiches Verhältniß zu einander	33
§. 98.	Eine Gerade ist mit einer zweiten parallel und schneidet eine dritte, dann können sich die letztern schneiden oder kreuzen, aber nicht parallel sein	33
§. 99.	Eine Ebene ist zu einer zweiten parallel und schneidet eine dritte, dann schneiden sich auch die zwei letztern	33
§. 100.	Eine Ebene ist parallel zu einer zweiten und senkrecht zu einer dritten, dann sind auch die zwei letzten auf einander senkrecht	34
§. 101.	Wenn eine Gerade auf zwei andern senkrecht steht, so können die letztern entweder parallel sein oder sich schneiden, oder sich kreuzen	34
§. 102.	Wenn eine Ebene auf zwei andern Ebenen senkrecht steht, so können die letztern parallel sein, oder sich schneiden	34
§. 103.	Eine Gerade ist zu einer zweiten Geraden und zu einer Ebene parallel, dann ist die zweite Gerade auch mit der Ebene parallel	35
§. 104.	Eine Ebene ist zu einer zweiten Ebene und zu einer Geraden parallel; dann ist die zweite Ebene auch zur Geraden parallel	35
§. 105.	Eine Gerade und eine Ebene, welche zu einer andern Geraden parallel sind und einen Punkt mit einander gemein haben, fallen zusammen	35
§. 106.	Eine Ebene und eine Gerade, welche zu einer anderen Ebene parallel sind und einen Punkt mit einander gemein haben, fallen zusammen	35
§. 107.	Eine Gerade ist zu einer andern parallel und schneidet eine Ebene, dann schneidet auch die zweite Gerade die Ebene	35
§. 108.	Eine Ebene ist zu einer andern parallel und wird von einer Geraden geschnitten, dann wird auch die zweite Ebene von der Geraden geschnitten	35
§. 109.	Eine Gerade ist auf einer andern senkrecht, und steht zugleich auf einer Ebene senkrecht, dann ist die zweite Gerade zur Ebene parallel	36
§. 110.	Eine Ebene ist auf einer andern senkrecht und zugleich auf einer Geraden, dann ist die zweite Ebene zur Geraden parallel	36
§. 111.	Eine Gerade ist parallel zu einer Ebene und eine zweite Gerade schneidet die Ebene, dann können die Geraden nicht parallel sein	37
§. 112.	Eine Ebene ist parallel zu einer Geraden und eine zweite Ebene wird von der Geraden durchschnitten, dann schneiden sich die Ebenen	37
§. 113.	Eine Ebene ist parallel zu einer Geraden und eine zweite Ebene ist senkrecht zur Geraden, dann sind die beiden Ebenen aufeinander senkrecht	37

Digitized by Google

Seite.

Kapitel V.

§. 114. Es sind drei Punkte gegeben, man soll drei parallele Geraden durch sie legen, die in einer Ebene liegen 38

§. 115. Eine Gerade und zwei Punkte sind gegeben; man soll untersuchen, ob die gegebenen Stücke in einer Ebene liegen . 38

§. 116. Ein Punkt und zwei Geraden sind gegeben; man soll eine Gerade finden, welche den Punkt enthält und die Geraden schneidet 38

§. 117. Ein Punkt und zwei Geraden sind gegeben; man soll eine neue Gerade finden, die mit je einer der Geraden in einer Ebene liegt 38

§. 118. Ein Punkt und zwei Geraden sind gegeben; man soll eine Ebene finden, die mit beiden parallel ist und durch den Punkt geht 39

§. 119. Ein Punkt und zwei Geraden sind gegeben; man soll eine neue Gerade finden, die auf den beiden ersten senkrecht steht und durch den Punkt geht 39

§. 120. Ein Punkt ist gegeben und zwei Geraden, durch erstere eine Ebene zu legen, die auf beiden Geraden senkrecht steht . 39

§. 121. Ein Punkt, eine Gerade und eine Ebene sind gegeben; man soll eine Gerade suchen, welche durch den Punkt geht, die gegebene Gerade schneidet und zur Ebene parallel läuft . 39

§. 122. Ein Punkt, eine Gerade und eine Ebene sind gegeben; man soll durch den Punkt eine Ebene legen, die zur Geraden parallel ist und auf der Ebene senkrecht steht 40

§. 123. Ein Punkt, eine Gerade und eine Ebene sind gegeben, durch den Punkt eine Gerade zu legen, die zur Geraden senkrecht ist und zur Ebene parallel 40

§. 124. Ein Punkt und zwei Ebenen sind gegeben, eine Gerade zu finden, die durch den Punkt geht und zu beiden Ebenen parallel ist 40

§. 125. Ein Punkt und zwei Ebenen sind gegeben; man soll eine Ebene finden, die auf beiden senkrecht steht und den Punkt enthält 41

§. 126. Drei Gerade sind gegeben; man soll eine vierte finden, die zwei schneidet und zur dritten parallel ist 41

§. 127. Zwei Geraden sind gegeben und eine Ebene, eine Gerade zu finden, die die drei gegebenen Stücke schneidet . . . 41

§. 128. Zwei Geraden und eine Ebene sind gegeben; man soll eine neue Gerade finden, welche die gegebenen Geraden schneidet und zur Ebene parallel ist 42

§. 129. Zwei Geraden und eine Ebene sind gegeben; man soll eine neue Gerade finden, die in der Ebene liegt, die erste Gerade schneidet und auf der zweiten senkrecht steht . . . 42

§. 130. Drei Ebenen sind gegeben; man soll einen Punkt suchen, der allen drei gemein ist 42

Kapitel VI.

§. 131 u. 132. Vom körperlichen Dreikant und seinen Bestimmungsstücken 43

§. 133, 134 u. 135. Von den Beziehungen, in welchen die Bestimmungsstücke eines Dreikantes zu denen eines neuen stehen, das dadurch erhalten wird, daß man eine, zwei, oder alle drei Kanten rückwärts verlängert . . . . . 43—44

Digitized by Google

Seite.

§. 136. Von der Entstehung der supplementaren Dreikante und ihrer gegenseitigen Beziehungen zu einander 45

§. 137. In einem Dreikant sind zwei Kantenwinkel zusammengenommen größer als der dritte 46

§. 138. Die Summe der drei Kantenwinkel ist nicht unbeschränkt, sondern sie ist kleiner als vier Rechte 46

§. 139. Die Summe der drei Ebenenwinkel eines Dreikants ist nicht eine bestimmte, wohl aber eine beschränkte Zahl und liegt zwischen zwei und sechs Rechten 47

§. 140. Von den Beziehungen, in welchen zwei Kantenwinkel eines Dreikantes zu den gegenüberstehenden Ebenenwinkeln stehen . 47

§. 141. Zwei Dreikante heißen congruent, wenn sie in allen Theilen so mit einander übereinstimmen, daß sie sich, gehörig auf einander gelegt, vollkommen decken 49

§. 142. Zwei Dreikante heißen congruent, wenn sie die drei Kantenwinkel stückweise gleich und in derselben Aufeinanderfolge haben 49

§. 143. Es sind drei Winkel gegeben; man soll ein Dreikant construiren, das sie als Kantenwinkel hat 50

§. 144. Zwei Dreikante sind congruent, wenn sie zwei Kantenwinkel und den von diesen eingeschlossenen Ebenenwinkel, stückweise gleich und in derselben Aufeinanderfolge haben . . . 51

§. 145. Es sind drei Winkel gegeben mit zwei als Kantenwinkel und dem dritten als dem von diesen eingeschlossenen Ebenenwinkel ein Dreikant zu construiren 51

§. 146. Zwei Dreikante sind nicht nothwendig congruent, wenn sie zwei Kantenwinkel und einen Ebenenwinkel, der einem der ersten gegenüberliegt, stückweise gleich und in derselben Aufeinanderfolge haben; sie sind es nur dann, wann in beiden die dem andern Kantenwinkel gegenüberstehenden Ebenenwinkel gleichzeitig spitz, recht oder stumpf sind 52

§. 147. Es sind drei Winkel gegeben; man soll ein Dreikant construiren, das zwei derselben als Kantenwinkel und den dritten als einen Ebenenwinkel hat, der einem der Kantenwinkel gegenüberliegt 57

§. 148. Andere Auflösung dieser Aufgabe 57

§. 149. Zwei Dreikante sind congruent, wenn ihre Supplementardreikante congruent sind 60

§. 150. Zwei Dreikante sind congruent
a. wenn sie die drei Ebenenwinkel,
b. wenn sie zwei Ebenenwinkel und den zwischenliegenden Kantenwinkel,
c. wenn sie zwei Ebenenwinkel und einen Kantenwinkel, der einem der gegebenen Ebenenwinkel gegenüberliegt, stückweise gleich und in derselben Aufeinanderfolge haben . 60

§. 151. Ein Dreikant zu construiren,
a. wenn drei Winkel als Ebenenwinkel,
b. wenn zwei Winkel als Ebenenwinkel und einer als der von den Ebenenwinkeln eingeschlossene Kantenwinkel,
c. wenn zwei Winkel als Ebenenwinkel und einer als der dem ersten Ebenenwinkel gegenüberliegende Kantenwinkel gegeben sind 60

§. 152. Ein mehrkantiges körperliches Eck heißt convex, wenn jeder der vorkommenden Kanten- und Ebenenwinkel kleiner als zwei Rechte ist 61

Digitized by Google

Seite.

§. 153. Die Summe sämmtlicher Kantenwinkel eines converen körperlichen n Ecks ist kleiner als 2π 61

§. 154. Die Summe sämmtlicher Ebenenwinkel eines converen körperlichen n Ecks liegt zwischen $(n-2)\pi$ und $n\pi$ . . 61

§. 155. Ein mehrkantiges körperliches Eck heißt regelmäßig oder gleichseitig, wenn sämmtliche Kanten und Ebenenwinkel unter sich gleich sind 62

§. 156. Ueber die Are eines regelmäßigen Körpereck 62

§. 157. Der Riß der Are auf sämmtlichen Ebenen des regelmäßigen Körpereck halbirt die Kantenwinkel 63

§. 158. Wenn man in einem Punkt der Are eine Ebene senkrecht auf sie errichtet, so wird dieselbe von sämmtlichen Kanten geschnitten. Die Schnittpunkte sind alle gleichweit vom Scheitel entfernt und bilden ein regelmäßiges n Eck, dessen Centrum der Punkt der Are ist 63

§. 159. Wenn man in einem regelmäßigen n Kante vom Scheitel aus sämmtliche Kanten gleich macht, so liegen die Endpunkte der Kanten in einer auf der Are senkrechten Ebene . . . 63

§. 160. Zwei mehrkantige (nicht regelmäßige) körperliche Ecken heißen congruent, wenn sie gehörig auf einander gelegt, sich vollkommen decken 64

§. 161. Zwei n Kanten sind congruent, wenn sie sämmtliche Kantenwinkel bis auf den letzten und sämmtliche Ebenenwinkel bis auf die zwei letzten stückweise gleich und in derselben Aufeinanderfolge haben 64

Zweiter Theil.

Kapitel I.

§. 162. Begriff vom Obelisken und seiner Bestimmungsstücke . . 65

§. 163. Erzeugungsweise eines Obelisken 67

§. 164. Vom Prisma 67

§. 165. Vom Parallelepipedum 67

§. 166. Regelmäßiges Prisma und Cylinder 67

§. 167. Pyramidaler Körper, Pyramide, Doppelpyramide und Pyramidalstumpf 67

§. 168. Regelmäßige Pyramide und Kegel 68

§. 169. Weniger als drei Seitenkanten und drei Ebenen kann ein Obelisk nicht haben. Ein dreikantiger Obelisk ist aber entweder ein prismatischer oder ein pyramidaler Körper . . 69

§. 170. Parallelschnitt eines Obelisken 69

§. 171. Der Parallelschnitt eines prismatischen Körpers ist ein zu den Grundebenen congruentes Vieleck 69

§. 172. Der Parallelschnitt eines pyramidalen Körpers ist ein den Basen ähnliches Vieleck, dessen Seiten sich zu den Seiten

Digitized by Google

Seite.

einer Basis verhalten, wie die Entfernung der Spitze vom Schnitte zu der von der Basis 69

§ 173. Zwei Obelisken sind congruent, wenn sie je eine entsprechende Grundfläche, die an jedem Eckpunkt derselben liegenden körperlichen Ecken congruent und je eine entsprechende Seitenkante gleich lang haben 69

§. 174. Zwei prismatische oder pyramidale Körper sind congruent, wenn sie die Grundflächen und zwei entsprechende körperliche Ecken congruent sowie zwei entsprechende Seitenkanten gleich lang haben 70

§. 175. Zwei pyramidale Körper sind congruent, wenn sie zwei Grundflächen und zwei entsprechende körperliche Dreikante congruent, ferner die dazu gehörigen zwei entsprechenden Seitenkanten gleich lang und die auf diesen liegenden Entfernungen der Spitze von den Ecken der Basis gleich haben 70

§. 176. Zwei pyramidale Körper sind congruent, wenn sie die beiden Körperwinkel an der Spitze congruent und drei Seitenkanten gleich lang haben 70

§. 177. Begriffsbestimmungen der Aehnlichkeit von begränzten Körpern 70

§. 178. Zwei Körper, welche zwei entsprechende körperliche Ecken congruent und alle aus den Scheiteln dieses Körperwinkels zu den übrigen entsprechenden Eckpunkten des Körpers gezogenen Geraden in demselben Verhältniß haben, sind ähnlich . 71

§. 179. Zwei prismatische oder pyramidale Körper sind ähnlich, wenn sie je ein entsprechendes körperliches Eck congruent und die zugehörigen Seitenkanten in gleichem Verhältniß haben, wie zwei entsprechende Grundkanten und die Grundflächen selbst ähnlich haben 71

§. 180. Wenn eine Pyramide parallel zur Grundebene geschnitten wird, so ist die zwischen der Spitze und Schnittebene neugebildete Pyramide der andern ähnlich 72

§. 181. Zwei Pyramiden sind ähnlich, wenn sie die zwei Körperecken an den Spitzen congruent und drei entsprechende Seitenkanten im gleichen Verhältniß haben 72

§. 182. In zwei ähnlichen Pyramiden verhalten sich die Basen wie die Quadrate der Höhen 72

Kapitel II.

§. 183. Von den Vielflächnern oder Polyedern 72

§. 184. Vom regelmäßigen Polyeder; es gibt deren nur fünf . . 72

§. 185. Es gibt ein regelmäßiges Polyeder, das vier Dreikante als Ecken und vier regelmäßige Dreiecke als ebene Flächen hat, und heißt Vierflächner oder Tetraeder 73

§. 186. Es gibt ein regelmäßiges Polyeder, das acht regelmäßige Dreikante als Ecken, sechs regelmäßige Vielecke als Seitenflächen hat und Sechsflächner oder Hexaeder heißt . . 74

§. 187. Es gibt ein regelmäßiges Polyeder, das zwanzig regelmäßige Dreikante als Ecken und zwölf regelmäßige Vielecke als Flächen hat. Ein solcher Körper heißt Zwölfflächner oder Dodekaeder . 74

Digitized by Google

Seite.

§. 188. Es gibt ein regelmäßiges Polyeder, das sechs Vierkante als Ecken und acht regelmäßige Dreiecke als Seitenflächen hat. Er heißt Achtflächner oder Oktaeder 75

§. 189. Es gibt ein regelmäßiges Polyeder, das zwölf regelmäßige congruente Fünfecke als Ecken und zwanzig regelmäßige Dreiecke als Flächen hat. Man heißt es Zwanzigflächner oder Ikosaeder 75

§. 190. In einem regelmäßigen Polyeder schneiden sich alle zu den Ecken gehörige Axen in einem Punkt 76

Kapitel *III.*

§. 191. Von der Kugel und ihren Bestimmungsstücken . . . 78

§. 192. Von der Geraden und Ebene, die die Kugel berühren . 78

§. 193. Eine Gerade oder Ebene, die weiter als um den Radius vom Centrum einer Kugel entfernt sind, haben keinen Punkt mit ihr gemein 79

§. 194. Eine Gerade, die näher als um den Radius vom Centrum einer Kugel entfernt ist, liegt mit einem Stücke ganz in der Kugel, das von zwei Oberflächen Punkten begränzt ist, die von dem Fußpunkt der Senkrechten, welche auf sie vom Centrum aus gefällt ist, gleichweit entfernt sind . . . 79

§. 195. Von der Schnittfigur einer Ebene und Kugel . . . 79

§. 196—200. Sätze über verschiedene bei der Kugel vorkommenden geometrischen Gebilde . . . . . 80—81

§. 201. Aufgabe. An eine Kugel eine Tangente zu construiren, die parallel zu einer gegebenen Geraden ist . . . 82

§. 202. Durch einen Punkt eine Tangente zu legen . . . 82

§. 203. Eine Tangentialebene parallel zu einer gegebenen Geraden finden 83

§. 204. Eine Tangentialebene parallel zu einer gegebenen Ebene finden 83

§. 205. Eine Tangentialebene zu finden, die durch einen gegebenen Punkt geht 83

§. 206. Von der Tangentialebene zum Kreiscylinder . . . 83

§. 207. Abwickelung der Cylinderfläche 83

§. 208—10. Schnitte von Ebenen und Cylinder 84

§. 211. Eine Tangentialebene zum Cylinder finden, wenn der Berührungspunkt gegeben ist 84

§. 212. Eine Tangentialebene zum Cylinder finden, die durch einen außerhalb liegenden Punkt geht 84

§. 213. Eine Tangentialebene zum Cylinder finden, die parallel ist zu einer gegebenen Ebene 85

§. 214. Von der Tangentialebene zum Kreiskegel 85

§. 215. Von der Abwickelbarkeit der Kegelfläche 85

§. 216—17. Von den Schnitten der Ebene und des Kegels . . 85—86

§. 218. Eine Tangentialebene zu einem Kegel zu finden, wenn der Berührungspunkt gegeben ist 86

*

Digitized by Google

Seite.

§. 219. Eine Tangentialebene zu einem Kegel zu finden, die durch einen Punkt außerhalb des Kegels geht 86

§. 220. Eine Tangentialebene zu finden, die zu einer gegebenen Ebene parallel ist 87

§. 221. Durch eine Gerade eine Ebene zu legen, welche einen Kegel berührt 87

Kapitel IV.

§. 222. Berechnung der Oberfläche ebenbegrenzter Körper . . . 87

§. 223. Mantelfläche des Cylinders $m = 2r\pi h$ 87

§. 224. Mantelfläche des Kegels $m = r\pi s = \frac{us}{2}$ 88

§. 225. Mantelfläche des Kegelstumpfs $m = s\pi(R+r) = s\left(\frac{U+u}{2}\right)$ 88

§. 226. Mantelfläche einer Kugelzone $m = 2r\pi h$, der Kugel selbst $4r^2\pi$ 88

Kapitel V.

§. 227. Begriff vom körperlichen Inhalt 89

§. 228. Der Inhalt eines Würfels $i = a^3$ 90

§. 229. Der Inhalt eines Prismas $i = bh$ 90

§. 230. Zwei Parallelepipede, die dieselbe Basis und gleiche Höhe haben, haben gleichen körperlichen Inhalt 90

§. 231. Zwei Prismen von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind gleich 91

§. 232. Den Inhalt eines schiefen Prismas findet man, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplicirt 91

§. 233. Bestimmung des Inhalts zwischen zwei parallelen Ebenen . 92

§. 234. Wenn bei einem Körper der Flächeninhalt eines in der Höhe x genommenen Schnitts $= a + bx + cx^2$, so ist der Inhalt des Körpers $i = ah + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3}$ . . . 94

§. 235. Unter der Voraussetzung des §. 234 ist auch $i = \frac{h}{6}\left(G+g+4g'\right)$ 95

§. 236. Der Inhalt des Obelisken ist nach §. 235 zu finden . 96

§. 237. Der Inhalt der Pyramide ist $i = \frac{bh}{3}$. Bei ähnlichen Pyramiden $J : i = H^3 : h^3$: 97

Digitized by Google

Seite.

§. 238. Der Inhalt des Pyramidalstumpfs ist $i = \frac{B + \sqrt{Bb} + b}{3} h$. 98

§. 239. Der Inhalt eines Pontons ist $= \frac{h}{6}\left(ab + a'b' + (a + a')(b + b')\right)$ 99

§. 240. Einen Pyramidenstumpf oder eine Pyramide durch einen Parallelschnitt in zwei Theile zu zerlegen, die sich wie m : n verhalten 99

§. 241. Von einer Kugelzone ist der Inhalt $i = h\pi\left(R^2 - a^2 - ah - \frac{h^2}{3}\right)$

oder $= \frac{1}{2}\left\{h\pi\left(r^2 + r'^2\right) + \frac{h^2\pi}{3}\right\}$ 101

§. 242. Inhalt einer Kugelhaube ist $i = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h)$ . . 102

§. 243. Inhalt eines Kugelausschnittes $i = \frac{2}{3}\pi h R^2$ . . . 102

§. 244. Inhalt einer Kugel $i = \frac{4}{3}\pi R^3$ 104

§. 245. Inhalt einer kugelförmigen Kuppel ist $= \frac{2GR}{3}$ . . 105

§. 246. Inhalt eines Rotationsparaboloids ist $i = \frac{gh}{2}$ . . . 105

§. 247. Den Inhalt eines Rotationskörpers z. B. eines Fasses zu finden 105

§. 248. Einige hydrostatische Sätze, die auf Inhaltsberechnungen Bezug haben 106

§. 249. Angabe einiger Hohlmaaße ꝛc. ꝛc. 108

Kapitel VI.

§. 250. Würfel 108

§. 251. Senkrechte Prismen 110

§. 252. Schiefe Prismen 110

§. 253. Senkrechte Cylinder 112

§. 254. Hohle Cylinder 116

§. 255. Pyramiden 119

§. 256. Pyramidalstumpfe 119

§. 257. Kreiskegel 119

§. 258. Kegelstumpfe 120

§. 259. Kugeln 121

§. 260. Hohlkugeln 123

Kapitel VII.

Sechszig vermischte Beispiele über Inhaltsberechnungen . . 125

Digitized by Google

Dritter Theil.

Kapitel I.

		Seite.
§. 261.	Gegenstand der darstellenden Geometrie	137
§. 262.	Zeichentafel oder Tafel	138
§. 263 u. 264.	Darstellung eines Punktes	138
§. 265.	Darstellung einer Geraden	141
§. 266.	Darstellung einer zur Tafel Senkrechten	141
§. 267 u. 268.	Von der Riß- und Abstandsgerade	142
§. 269.	In welchem Fall das Bild einer Geraden durch Riß und Abstandsgeraden nicht bestimmt werden kann	143
§. 270.	Das Bild eines Geradenpunktes zu finden	144
§. 271.	Auffindung der Beziehungen, welche eine Gerade zur Tafel hat	145
§. 272.	Darstellung einer zur Tafel parallelen Geraden	146
§. 273.	Wie aus dem Bild einer Geraden ihre Lage zur Tafel gefunden wird	147
§. 274.	Von dem Bilde zweier sich schneidenden Geraden	148
§. 275.	Zweier parallelen Geraden	148
§. 276.	Zweier sich kreuzenden Geraden	149
§. 277.	Eine Gerade zu suchen, die eine gegebene schneidet	149
§. 278.	Durch einen Punkt eine Gerade legen, die eine andere schneidet	150
§. 279.	Eine Gerade durch einen Punkt zu legen, die zu einer zweiten parallel geht	150
§. 280.	Aus der Rißgeraden und dem Winkel zur Tafel von einer Geraden diese finden	151
§. 281.	Hinweis auf einige Aufgaben bezüglich einer Geraden, die im dritten Kapitel erst zu lösen sind	151
§. 282.	Das Bild einer Ebene zu bestimmen	151
§. 283.	Das Bild einer zur Tafel senkrechten Ebene zu finden	151
§. 284.	Wenn die Ebene zur Are senkrecht ist	152
§. 285.	Zu einer bestimmten Ebene kann Riß oder Abstand eines ihrer Punkte beliebig angenommen werden, dann aber ist Abstand oder Riß zu finden	152
§. 286.	Für eine gegebene Ebene soll eine Gerade, die in ihr liegt, bestimmt werden	153
§. 287.	Zu dem Rißpunkt eines Ebenenpunktes den Abstand zu finden	153
§. 288.	Zu dem Abstand eines Ebenenpunktes den Riß zu finden	154
§. 289.	Das Bild einer zur Tafel parallelen Ebene zu bestimmen	154
§. 290.	Die Spur einer Ebene zu finden	154
§. 291.	Das Bild einer zur Are parallelen Ebene	154
§. 292.	Den Winkel einer Ebene zur Tafel zu finden	154
§. 293.	Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, die zur Tafel eine bestimmte Neigung hat	155
§. 294.	Durch eine Gerade eine Ebene zu legen, die zur Tafel eine bestimmte Neigung hat	155
§. 295.	Durch einen Punkt eine Gerade legen, die zu einer Ebene parallel ist	156
§. 296.	Wann eine Gerade zu einer Ebene parallel ist	156
§. 297.	Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, die zu einer Geraden parallel ist	156
§. 298.	Durch eine Gerade eine Ebene legen, die zu einer andern Geraden parallel ist	156
§. 299.	Bedingungen, unter welchen zwei Ebenen parallel sind	156

Digitized by Google

Seite.

§. 300. Durch einen Punkt eine Ebene legen, die zu einer gegebenen Ebene parallel ist 157
§. 301. Bedingungen, unter welchen eine Gerade auf einer Ebene senkrecht ist 157
§. 302. Durch einen Punkt eine Gerade zu legen, die auf einer Ebene senkrecht steht 157
§. 303. Durch eine Gerade eine Ebene legen, die auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht 158
§. 304. Durch einen Punkt eine Ebene legen, die auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht 158
§. 305. Die Kante zweier sich schneidenden Ebenen zu finden . . 158
§. 306. Den Schnittpunkt einer Geraden und einer Ebene zu finden . 159
§. 307. Hinweis auf einige Aufgaben bezüglich einer Geraden und Ebene, die erst im dritten Kapitel zu lösen sind . . . 159
§. 308. Von den Bildern geradlinigt begrenzter Figuren . . . 159

Kapitel *II.*

§. 309. Warum oft eine zweite Tafel anzunehmen ist . . . 160
§. 310. Wann die Bestimmungsstücke bezüglich einer Tafel gegeben sind, dieselben bezüglich einer zur ersten parallelen zweiten Tafel zu finden 160
§. 311—312. Auffindung des Risses und Abstands eines Punktes bezüglich einer neuen Tafel, die die alte schneidet, wenn der Winkel beider Tafeln und die Bestimmungsstücke zur alten gegeben sind . . . . . 161—62
§. 313. Auftragung der gefundenen zweiten Risse und Abstände in der Zeichentafel 162
§. 314. Beispiele von verschiedenen zu übertragenden Punkte . . 163
§. 315. Wenn die neue Tafel auf der alten senkrecht steht, so ist die Auffindung der Bestimmungsstücke äußerst einfach . . . 165
§. 316. Annahme einer neuen Axe in der Zeichentafel . . . 165
§. 317. Auflösung von fünf anderweitigen Aufgaben, auf welche man bei Uebertragung von einer Tafel auf eine zweite kommen kann 165
§. 318. Sämmtliche Bestimmungsstücke einer Geraden bezüglich einer neuen Tafel aufzufinden, wenn die zur alten gegeben sind . 167
§. 319. Dieselbe Aufgabe von einer Ebene 168
§. 320. Riß- und Abstandsfigur einer ebenen Figur zu finden, wenn dieselbe ihrer Größe und Lage nach gegeben ist 169
§. 321. Aus der Riß- und Abstandsfigur einer ebenen Figur die letztere selbst ihrer Größe und Lage nach zu finden 169

Kapitel *III.*

§. 322. Die Entfernung eines Punktes von einer Ebene zu finden . 169
§. 323. Entfernung zweier paralleler Ebenen oder einer Ebene und einer parallelen Geraden zu finden 170

Digitized by Google

Seite.

§. 324. Eine Ebene ist gegeben; man soll einen Punkt, eine zu ihr parallele Gerade oder Ebene finden, die zur Ebene einen bestimmten Abstand habe 170
§. 325. Eine Ebene ist gegeben und eine Gerade; man soll einen Punkt der Geraden suchen, der zur Ebene eine bestimmte Entfernung hat 170
§. 326. Ein Punkt und eine Gerade sind gegeben, man soll die Entfernung des ersteren vom letzteren finden 171
§. 327. Zwei parallele Geraden sind gegeben; man soll ihre Entfernung finden 171
§. 328. Den Winkel einer Geraden und einer Ebene zu finden . 171
§. 329. Den Winkel zweier Ebenen zu finden 171
§. 330. Den Winkel zweier Geraden zu bestimmen 171
§. 331. Eine Gerade und eine Ebene sind gegeben; man soll durch die Gerade eine zweite Ebene legen, die zur ersten unter einem bestimmten Winkel geneigt ist 171
§. 332. Eine Gerade und ein Punkt außer ihr ist gegeben; man soll durch den Punkt eine zweite Gerade legen, die mit der ersten einen bestimmten Winkel macht 172
§. 333. Eine Gerade und ein Punkt ist gegeben; man soll von dem Punkt auf die Gerade einen sie schneidenden Perpendikel ziehen 172
§. 334. Den Winkel zweier Geraden durch Geraden, welche in der Ebene der ersten enthalten sind und durch den Scheitel gehen, in beliebige Theile theilen 172
§. 335. Den Winkel zweier Ebenen in beliebige Theile zu theilen . 172
§. 336. Zwei sich kreuzende Gerade sind gegeben; man soll finden
a. ihre Entfernung,
b. die Gerade, welche auf beiden gleichzeitig senkrecht steht und sie schneidet 172

Kapitel *IV.*

§. 337. Vom Bilde der Kugel 173
§. 338. Das Bild einer Kugelfläche ist gegeben, man soll einen Punkt derselben darstellen 174
§. 339. Den Durchschnitt einer Kugelfläche und einer Geraden finden 174
§. 340. Den Durchschnitt einer Kugel und einer Ebene zu finden . 175
§. 341. Die Berührungsebene an die Kugel zu finden, welche ihrer Richtung nach gegeben ist 175
§. 342. Durch einen gegebenen Punkt der Kugelfläche die Berührungsebene zu legen 176
§. 343. Durch einen außerhalb einer Kugelfläche gelegenen Punkt eine Berührungsebene an letztere zu legen 176
§. 344. Vom Bilde eines Cylinders 177
§. 345. Zu dem Riß eines Cylinderpunktes den Abstand zu finden . 177
§. 346. Zum Abstand eines Cylinderpunktes den Riß zu finden . . 177
§. 347. Den Schnitt eines Cylinders und einer Ebene finden . . 178
§. 348. Durch einen gegebenen Punkt eine Berührungsebene an einen Cylinder zu legen 178
§. 349. Das Bild einer Kegelfläche finden 178
§. 350. Den Durchschnitt eines Kegels und einer Ebene zu finden . 179
§. 351. An einen Kegel eine Berührungsebene durch einen gegebenen Punkt zu legen 179

Digitized by Google

Kapitel V.

		Seite.
§. 352.	Ein Dreikant darzustellen, wenn drei Stücke von ihm gegeben sind	179
§. 353.	Von einer Pyramide ist Spitze und Basis gegeben, man soll ihr Bild finden	179
§. 354.	Von einem pyramidalen Körper ist die Spitze, die eine Basis und die Höhe gegeben, sein Bild zu finden	180
§. 355.	Von einem pyramidalen Körper ist die Basis und zwei an einer Kante liegende Seitenflächen gegeben, sein Bild zu finden	180
§. 356.	Von einem Prisma ist die Basis und zwei an einer Kante liegende Seitenflächen gegeben, sein Bild zu finden	181
§. 357.	Das Bild eines nkantigen Obelisken zu finden	181
§. 358.	Die sichtbaren Theile der Körperoberflächen	181
§. 359.	Das Aufnehmen eines Körpers	182

Digitized by Google

Digitized by Google

Erster Theil.

Kapitel I.

Einleitung. Von der Lage gerader Linien im Raum unter sich und zu Ebenen und der Lage dieser unter sich im Allgemeinen. Vom Parallelismus der Geraden und Ebenen im Besondern.

§. 1. Die Geometrie beschäftigt sich mit der wissenschaftlichen Betrachtung der Raumgebilde und Raumgrößen — Punkte, Linien, Flächen und Körper — und theilt sich in die Planimetrie, welche sich auf die Betrachtung derjenigen Gebilde beschränkt, die in einer einzigen Ebene vorkommen; während die Stereometrie die ihrige auch auf die übrigen ausdehnt. Die Stereometrie zerfällt indessen selbst wieder in eine niedere und eine höhere, wir haben es hier nur mit der erstern vorausgehenden zu thun und theilen dieselbe ab in den

Ersten Theil, welcher die Lage unbegränzter Geraden und unbegränzter Ebenen unter sich allein und unter einander behandelt;

Zweiten Theil, welcher sich mit der Betrachtung verschiedener ebenbegränzten und der drei sogenannten runden Körper abgibt; und in den

Digitized by Google

Dritten Theil, welcher die bildliche Darstellung der in den vorangegangenen Theilen bekannt gewordenen Raumgebilden auf eine als Ebene angenommene Zeichentafel lehrt.

§. 2. Durch die Fortbewegung eines Punktes entsteht eine Linie, bewegt sich diese, so erzeugt sie eine Fläche und bei der Bewegung der letztern entsteht ein Körper. Deßhalb sind auch Punkte die Gränzen einer Linie, Linien die einer Fläche und Flächen die eines Körpers.

§. 3. Ein Punkt theilt eine Linie, in welcher er sich befindet, in zwei Theile, der eine Theil enthält Punkte, die der die Linie erzeugende Punkt durchwandert, ehe er zu dem betrachteten kam, der andere Theil ist nach dem betrachteten Punkt zurückgelegt. Diese Zweiheit der Linie bezüglich eines Punktes bezeichnet man dadurch, daß man sagt, eine Linie erstreckt sich nach zwei Seiten eines ihrer Punkte.

Ebenso hat eine Linie in einer Fläche zwei Seiten und eine Fläche in einem körperlichen Raum.

Wenn eine Linie Punkte auf verschiedener Seite einer Fläche hat, so muß sie mit dieser wenigstens einen Punkt gemein haben, den man Schnittpunkt der beiden Gebilde nennt. —

§. 4. Aus §. 3. folgt unmittelbar, daß zur Bestimmung der Lage oder Gestalt einer Linie mindestens zwei Punkte, die sie enthalten soll, gegeben sein müssen, allein auch diese reichen, wie von vornherein leicht eingesehen werden kann, im Allgemeinen nicht hin, um eine Linie als eine gewisse von andern unterscheiden und erkennen zu lassen. Blos die sogenannte Gerade ist ihrer Lage nach, und, da nichts weiter an ihr zu betrachten ist, somit sie selbst vollkommen bestimmt, wenn es zwei ihrer Punkte sind.

Durch dieselben zwei Punkte kann demnach nur eine Gerade gedacht werden, und zwei verschiedene Geraden können nur einen einzigen Punkt mit einander gemein haben.

Wenn von der Geraden nichts weiter als diese sie bestimmende Eigenschaft gegeben ist, es dieser aber nicht entgegensteht, wenn man sie unbegränzt annimmt, so müssen wir dieses bei allgemeinen Betrachtungen immer thun.

Digitized by Google

§. 5. Wenn von zwei Geraden angenommen werden soll, daß sie einen Punkt im endlichen Raum gemein haben, so sagt man, sie *schneiden* sich, und den gemeinsamen Punkt nennt man *Schnittpunkt*.

Soll von zwei Geraden angenommen werden, daß sie wohl einen Punkt gemein haben, dieser aber, so weit man auch in der Wirklichkeit den Lauf der Geraden verfolgt, nicht zu erreichen, sondern unendlich weit davon entfernt ist, so sagt man die Geraden sind *parallel* oder *gleichlaufend*.

Sollen endlich zwei Gerade keinen Punkt gemein haben, so sagt man (mit einer in §. 16. noch anzuführenden Beschränkung) sie *kreuzen sich* oder *gehen an einander vorbei*.

§. 6. Durch einen Punkt kann man sich unzählig viele verschiedene Gerade gelegt denken.

Denn durch den Punkt und einen beliebigen zweiten ist eine Gerade bestimmt. Durch den ersten Punkt und einen dritten, der nicht in der ersten Geraden liegt, ist eine zweite Gerade, durch den ersten Punkt und einen vierten, der nicht in der vorigen Geraden liegt, ist eine dritte Gerade bestimmt u. s. f.

§. 7. Durch einen Punkt kann nur eine Gerade gedacht werden, die zu einer andern bestimmten parallel ist.

Denn, wenn man sich zwei verschiedene Geraden auch denken wollte, so hätten dieselben den gegebenen Punkt und den unendlich weit entfernten mit einander gemein, und sind deßhalb nicht verschieden.

§. 8. Wenn eine Fläche die Eigenschaft hat, daß eine Gerade, die man sich durch irgend zwei ihrer Punkte gelegt denkt, alle Punkte mit der Fläche gemein hat, so heißt man sie *Ebene*. Eine Ebene ist eine unbegränzte Fläche.

§. 9. Durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, ist die Lage einer Ebene vollkommen bestimmt.

Denn, wenn man auch zwei verschiedene Ebenen, die die gegebenen Punkte gemein haben sollen, annimmt, so läßt sich leicht beweisen, daß dieselben außer den drei Punkten jeden beliebigen vierten gleichfalls gemein haben, also nur *eine* ausmachen.

Digitized by Google

Verbindet man nämlich die drei Punkte, je zwei durch eine Gerade, so liegen die Verbindungsgeraden nach §. 8. in beiden Ebenen. Zieht man nun durch einen beliebigen vierten Punkt in der einen Ebene eine Gerade so, daß sie zwei der Verbindungsgeraden in zwei verschiedenen Punkten schneidet, so liegt auch diese Gerade, da sie die zwei Punkte mit beiden Ebenen gemein hat, in beiden Ebenen, und mit ihr auch der vierte Punkt.

Eine Fläche im Allgemeinen ist durch drei ihrer Punkte nicht bestimmt. Es macht also unter den Flächen die Ebene dieselbe Ausnahme, wie die Gerade unter den Linien.

§. 10. Eine Gerade fällt mit einer Ebene zusammen, wenn sie einen endlich entfernten Punkt mit der Ebene gemein hat und zu einer in der Ebene liegenden Geraden parallel ist.

Denn die Gerade hat mit der Ebene außer dem genannten Punkt noch den unendlich weit entfernten mit der in der Ebene liegenden und zu ihr parallelen Geraden, d. h. zwei Punkte mit der Ebene gemein, und liegt somit nach §. 8. in derselben.

§. 11. Eine Gerade, die mit einer in einer Ebene liegenden Geraden parallel läuft, kann keinen endlich entfernten Punkt mit der Ebene gemein haben, wenn sie außerhalb derselben liegen soll. Man sagt dann die Gerade und Ebene sind zu einander *parallel*. Sämmtliche endlich entfernte Punkte liegen nach §. 3. auf der nämlichen Seite der Ebene.

§. 12. Eine Gerade kann mit einer Ebene nur einen Punkt gemein haben, wenn sie nicht in der Ebene liegen soll. Liegt der gemeinsame Punkt endlich entfernt, so sagt man, die Gerade und Ebene *schneiden sich*. Die bezüglich des Schnittpunktes zweiseitig gelegenen Theile der Geraden liegen auf beiden Seiten der Ebene.

§. 13. Eine Gerade, welche zwei Punkte, die auf verschiedenen Seiten einer Ebene liegen, verbindet, schneidet die Ebene nach §. 3. Eine Gerade, deren endlich entfernte Punkte auf *einer* Seite einer Ebene liegen, ist parallel zur Ebene aus §. 12.

§. 14. Durch einen Punkt kann man sich unzählig viele Gerade denken, die alle mit einer Ebene parallel laufen.

Denn legt man durch den Punkt mit den unzählig vielen verschiedenen

Digitized by Google

Geraden der Ebene jedesmal eine Parallele, so ist jede nach §. 11. zur Ebene selbst parallel.

§. 15. Eine Ebene ist bestimmt und kann immer gelegt gedacht werden.

a) durch einen Punkt und eine Gerade,

b) durch zwei sich schneidenden Geraden,

c) durch zwei parallele Geraden,

Denn nimmt man im Falle a) zwei Punkte der Geraden und den gegebenen als dritten, in den Fällen b) und c) zwei Punkte der Geraden und den endlich oder unendlich entfernten Schnittpunkt als dritten, so kann durch die drei Punkte eine, aber nur eine Ebene gedacht werden und diese enthält dann die jedesmal gegebenen Geraden nach §. 8.

§. 16. Wenn durch zwei Geraden keine Ebene gelegt werden kann, so können sie nach §. 15. weder parallel sein, noch sich schneiden, müssen sich also kreuzen und können dann nach §. 5. keinen Punkt gemein haben. Umgekehrt ist es wohl denkbar, daß zwei Geraden in einer Ebene liegen und keinen Punkt gemein haben. Allein, wie die Planimetrie lehrt, können solche zwei Geraden von Parallelen nicht unterschieden werden, und wir wollen deßhalb für die Folge den Begriff der parallelen Geraden dahin erweitern, daß wir sagen, wenn zwei Gerade keinen Punkt im endlichen Raum gemein haben, von ihnen aber angenommen werden kann, daß sie einen im unendlichen Raum gemein haben, gleichgültig, ob das so ist oder nicht, so daß sie also in einer Ebene liegend gedacht werden können, so heißen sie parallel.

Dagegen beschränken wir den Begriff zweier sich kreuzenden Geraden in so fern, als wir darunter solche verstehen, von denen nicht angenommen werden darf, daß sie einen Punkt mit einander gemein haben und auch nicht in einer Ebene liegen.

§. 17. Eine Ebene, die durch zwei sich schneidende Geraden, die mit einer zweiten Ebene parallel sind, geht, kann mit der letzteren keinen endlich entfernten Punkt gemein haben.

Denn die zwei Ebenen hätten eine Gerade gemein, die, weil sie unmöglich zu den beiden gegebenen Geraden gleichzeitig parallel sein könnte, wenigstens einen Punkt im Endlichen mit beiden gemein

Digitized by Google

hätte, in diesem Punkt müßte dann eine derselben die zweite Ebene schneiden, was gegen die Voraussetzung ist.

Zwei Ebenen, die keinen Punkt im endlichen Raum mit einander gemein haben, heißen *parallel*.

§. 18. Zwei Ebenen, die einen Punkt mit einander gemein haben, haben (wenn sie nicht willkührlich begränzt sind), immer eine durch den Punkt gehende Gerade gemein.

Denn zieht man durch den gemeinsamen Punkt in der ersten Ebene zwei Gerade und verbindet einen Punkt der einen Geraden diesseits mit einem Punkt der anderen Geraden jenseits, der zweiten Ebene, so muß die Verbindungsgerade nach §. 8. in der ersten Ebene liegen und nach §. 13. die zweite Ebene durchschneiden und zwar in einem Punkt, der mit dem als gemeinsam angenommenen Punkt nicht zusammenfällt, und es haben somit beide Ebenen noch einen zweiten Punkt mit einander gemein, folglich nach §. 8. auch die durch beide Punkte, also durch den gemeinsamen gehende Gerade.

Hieraus und nach §. 9. folgt, daß zwei unbegränzte Ebenen nichts weiter gemeinsam haben können, als eine Gerade, diese heißt man *Durchschnitt* oder *Kante*. Hat die Kante ihre Punkte im endlichen Raum, so sagt man die Ebenen *schneiden* sich.

§. 19. Durch eine Gerade sind unzählig viele verschiedene Ebenen möglich, welche sie als gemeinsame Schnittlinie haben. Beweis wie in §. 6.

§. 20. Wenn eine Gerade eine Ebene schneidet und man denkt sich durch die Gerade eine zweite Ebene gelegt, so kann letztere weder mit der ersteren zusammenfallen, noch damit parallel sein, sondern beide Ebenen schneiden sich in einer durch den Schnittpunkt der Geraden und Ebene gehende Kante.

Zusammenfallen können die Ebenen nicht, weil sonst auch die Gerade in der ersten Ebene sein müßte, parallel sein können sie auch nicht, da sie schon einen Punkt im endlichen Raume gemein haben, sie müssen deßhalb nach §. 18. eine durch diesen Punkt gehende Gerade gemein haben.

§. 21. Wenn eine Gerade parallel zu einer Ebene ist und man legt durch sie eine zweite Ebene, welche die erste schneidet (indem man von einem Punkt der Geraden zu einem Punkt

Digitized by Google

der Ebene eine zweite Gerade zieht und durch beide eine zweite Ebene legt), so schneiden sich beide Ebenen in einer zur ersten Geraden parallelen Kante.

Daß sich beide Ebenen schneiden, folgt aus §. 19., daß die Kante zur ersten Geraden parallel sein muß, aus §. 16.

§. 22. Eine Ebene und eine außer ihr liegende Gerade schneiden sich oder sind parallel; ein dritter Fall ist nicht möglich.

Denn man kann durch die Gerade immer eine die erste Ebene schneidende zweite Ebene legen, die Schnittgerade wird nun entweder von der Geraden geschnitten oder sie ist parallel zu ihr; ein dritter Fall ist unmöglich, woraus die Richtigkeit des Satzes mit Hülfe der §§. 11. und 12. von selbst folgt.

§. 23. Zwei Ebenen schneiden sich, oder sind parallel; ein dritter Fall ist unmöglich. Beweis ist ähnlich zu führen wie der vorhergehende.

§. 24. Wenn eine Gerade eine Ebene schneidet, so schneiden verschiedene andere durch die Gerade gehenden Ebenen die erste in Kanten, die nach §. 20. durch den Schnittpunkt der Geraden gehen.

Wenn aber die Gerade zur ersten Ebene parallel ist und durch dieselbe verschiedene die erste Ebene schneidenden andere Ebenen gelegt werden, so geschieht dieß in lauter unter sich parallelen Kanten, wie leicht aus §. 21. zu folgern ist.

§. 25. Wenn zwei Ebenen sich schneiden und man zieht in jeder Ebene eine Gerade zur Schnittlinie parallel, so sind diese Geraden unter sich parallel.

Denn jede so gezogene Gerade der einen Ebene ist auch nach §. 11. zur andern Ebene parallel. Legt man nun durch die erste Gerade und einen Punkt der zweiten Geraden eine dritte Ebene, so schneidet dieselbe nach §. 24. die zweite Ebene in einer, sowohl zur ersten, als auch zur Kante parallelen dritten Geraden, diese und die zweite Gerade müssen, weil beide in derselben Ebene, durch denselben Punkt gehen und mit ein und derselben Geraden, der Kante, parallel sind, zusammenfallen, also ist die zweite Gerade, weil es die dritte ist, zur ersten parallel.

§. 26. Wenn zwei Geraden zu einer dritten parallel sind, so sind sie unter sich parallel.

Digitized by Google

Denn durch erste und dritte, sowie durch zweite und dritte, kann man je eine Ebene durchlegen, diese beiden Ebenen haben die dritte Gerade als Kante gemein, und es muß nun nach vorhergehendem §. die erste zur zweiten parallel sein.

§. 27. Zwei unter sich parallele Ebenen bilden, wenn sie von einer dritten Ebene geschnitten werden, mit dieser parallele Schnittlinien.

Denn da die Schnittlinien in der dritten Ebene liegen, so können sie sich nicht kreuzen; schneiden können sie sich, wie leicht einzusehen ist, auch nicht, sie sind deßhalb parallel. — Aus diesem Satze folgt ohne Schwierigkeit, daß in einer von zwei parallelen Ebenen in jedem Punkt zwei oder mehrere Geraden angenommen werden können, die mit zwei oder mehreren in der andern Ebene liegenden Geraden parallel sind.

§. 28. Zwei Ebenen, die mit einer dritten Ebene parallel sind, sind unter sich parallel.

Denn man kann in der ersten Ebene ein Paar sich schneidender Geraden annehmen, die zu einem Paar in der dritten Ebene parallel sind. Zu dem letzten Paar läßt sich jedoch ein anderes Paar Parallelen in der zweiten Ebene annehmen. Nun muß aber nach §. 26. das Paar der ersten Ebene zu jenem der zweiten parallel sein, woraus der Parallelismus der beiden Ebenen selbst aus §. 17. hervorgeht.

§. 29. Zwei Ebenen die durch *einen* Punkt gehen und zu einer dritten parallel sind, fallen zusammen. Schneiden können sich beide Ebenen nach vorhergehendem §. nicht, da sie nun aber einen Punkt gemein haben, so müssen sie alle Punkte gemein haben oder sich decken.

§. 30. Sämmtliche Geraden, die durch einen Punkt gehen und zu einer Ebene parallel sind, liegen in einer Ebene.

Denn legt man durch je zwei derselben eine Ebene, so sind diese Ebenen nach §. 17. zur gegebenen alle parallel und bilden nach §. 29. nur eine Ebene, welche somit alle Parallele enthält.

§. 31. *Aufgabe.* Durch einen Punkt eine Ebene legen, die zu einer gegebenen Geraden parallel ist.

Man legt durch den Punkt eine Gerade zur gegebenen parallel, dann ist jede Ebene, die diese Gerade enthält, nach §.

Digitized by Google

11. die verlangte. Die Aufgabe hat somit unzählig viele Lösungen.

§. 32. Aufgabe. Durch einen Punkt eine Ebene legen, die zu einer gegebenen Ebene parallel ist. Man legt durch den Punkt zwei Geraden zur Ebene parallel, und dadurch ist die gesuchte Ebene bestimmt. Die Aufgabe ist eindeutig nach §. 30.

§. 33. Durch einen Punkt eine Ebene legen, die zu zwei Geraden parallel ist. Man legt durch den Punkt zwei Gerade parallel zu den gegebenen; durch dieselben ist die Ebene bestimmt, den Fall ausgenommen, wo die Hülfsgeraden zusammenfallen, welcher eintritt, wenn die gegebenen Geraden unter sich selbst parallel sind.

§. 34. Aufgabe. Durch eine gegebene Gerade eine Ebene legen, die zu einer andern Geraden parallel ist.

a) Die beiden gegebenen Gerade schneiden sich, so ist die Aufgabe unmöglich.

b) Die zwei Geraden sind parallel, dann ist jede durch erste gehende Ebene nach §. 11. die gesuchte. Die Aufgabe ist also unbestimmt.

c) Die zwei Geraden kreuzen sich, dann zieht man durch einen Punkt der ersten eine Gerade parallel zur zweiten und durch die zwei sich schneidenden Geraden ist die gesuchte Ebene bestimmt. Die Aufgabe ist eindeutig, denn, wenn in einem zweiten Punkt der ersten Geraden mit der zweiten eine Parallele gezogen wird, so ist diese nach §. 26. zur ersten Parallelen gleichlaufend und liegt somit nach §. 10. in der schon gefundenen Ebene.

§. 35. Durch eine Gerade eine Ebene legen, die zu einer andern Ebene parallel ist.

a) Die gegebene Gerade ist zur gegebenen Ebene parallel. Man legt durch einen Punkt der Geraden eine zur Ebene parallele zweite Gerade, dann bestimmen die beiden Geraden die gesuchte Ebene.

b) Die gegebene Gerade schneidet die Ebene, dann ist die Auflösung unmöglich.

Digitized by Google

Kapitel II.

Von der Neigung zweier Geraden im Raum. Von dem Senkrechtsein zweier Geraden, einer Gerade und Ebene und zweier Ebenen. Entfernung eines Punktes von einer Geraden oder Ebene ꝛc. Entfernung paralleler Geraden und Ebenen.

§. 36. Zwei sich schneidende Geraden machen einen ihre gegenseitige Neigung bestimmenden Winkel, und was hierin in der Planimetrie gesagt wird, hat auch bei uns volle Gültigkeit, indem beide Geraden in einer Ebene liegen. Machen die Geraden einen Winkel von 90^0, so sagt man, es ist eine zur andern senkrecht oder perpendikulär.

§. 37. Zwei Paare sich schneidender Geraden, von denen je eine des einen Paars parallel ist zu einer des andern, bilden gleiche Winkel unter sich, und die Winkelebenen sind zu einander parallel.

Denken wir uns die zwei parallelen Schenkel jedesmal vom Scheitel aus unter sich gleich gemacht, und die Endpunkte der Schenkel an einem jeden Winkel mit einander verbunden, so erhält man zwei Dreiecke, die wir zu besserem Verständniß an ihren Punkten mit Buchstaben bezeichnen wollen: es sei nun Fig. 1. BAC das eine Dreieck und $B'A'C'$ das andere, wo A und A' die Scheitel der Winkel, ferner $AB \# A'B'$, $AC \# A'C'$ die entsprechenden Schenkel, endlich BC und $B'C'$ die gehörigen genannten Verbindungsgeraden sind. Wir denken uns nun AA' BB' und CC', d. h. die Verbindungsgeraden zweier entsprechenden Puncten gezogen, so sind AA' und BB', sowie AA' und CC' jedesmal in einer Ebene und bilden nach der Planimetrie zwei ebene Parallelogramme, $AA'BB'$ und $AA'CC'$, folglich sind BB' und $CC' \# AA'$, also auch $BB' \# CC'$, deßhalb ist $BB'CC'$ ein Parallelogramm, somit auch $BC = B'C$, also sind die diesen Seiten in obengenanntem Dreiecke entgegenliegenden Winkel BAC und $B'A'C'$ einander gleich, wie zu erweisen war. Daß aber die beiden Ebenen, die die Winkel enthalten, parallel sind, ist eine einfache Folge von §. 17. und §. 11.

Digitized by Google

§. 38. Die Neigung zweier Geraden, die sich kreuzen, wird dadurch bestimmt, daß man durch einen Punkt der einen eine Parallele zur zweiten zieht, den Winkel der zwei sich schneidenden nennt man den Winkel der Geraden selbst. Es ist einerlei, welche von den Geraden man als erste nimmt, indem der Winkel, welchen die zweite Gerade mit einer sie schneidenden Parallele zur ersten nach vorhergehendem § dem erst construirten gleich ist. Ist der gefundene Winkel zweier sich kreuzenden ein rechter, so sagt man dieselben stehen auf einander senkrecht.

§. 39. Von einem Punkt außerhalb einer Geraden ist nur eine Gerade zu ziehen möglich, die die gegebene schneidet und auf ihr senkrecht steht. Die Länge dieser Senkrechten vom Punkt bis zum Schnitte ist die kürzeste Entfernung des Punktes zu einem Punkte der Geraden und heißt kurzweg Entfernung des Punktes zur Geraden.

Denn Punkt, Gerade und Perpendikel liegen zusammen in einer Ebene, folglich gilt hier die Planimetrie, in welcher aber alles im Satze Angegebene als richtig nachgewiesen wird.

§. 40. Zwei sich schneidende Geraden haben in verschiedenen Punkten verschiedene Entfernungen zu einander, die um so kleiner sind, je näher die zu betrachtenden Punkte dem Schnittpunkte der Geraden liegen; ferner ist ein Perpendikel, von einem Punkt der erstern zur andern, kein Perpendikel zur erstern. Zwei Parallelen haben überall dieselbe Entfernung zu einander, und eine Gerade, die von einem Punkt der einen auf die andere senkrecht gezogen wird, ist zugleich senkrecht zur erstern.

Denn jedesmal liegen die hier vorkommenden Raumgrößen in ein und derselben Ebene; es ist somit die Planimetrie maßgebend, welche aber die Wahrheit des Behaupteten nachweist.

§. 41. In einem Punkt einer Geraden sind unzählig viele Senkrechte auf diese möglich.

Denn man kann nach §. 19. unzählig viele Ebenen annehmen, die die Gerade mit ihrem Punkt enthalten, und in jeder derselben kann im Punkte auf die Gerade eine Senkrechte errichtet werden. Hieraus folgt, daß eine Gerade gleichzeitig auf unzählig vielen sie in einem Punkte schneidenden Geraden senkrecht stehen kann. Jedoch können nach der Planimetrie keine zwei derselben mit der Geraden gleichzeitig in einer Ebene liegen.

Digitized by Google

§. 42. Wenn eine Gerade zu einer andern senkrecht ist, so ist sie auch zu jeder mit ersterer parallelen senkrecht. Beweis folgt einfach aus §. 38.

§. 43. Wenn eine Gerade auf zwei sie in einem Punkte schneidenden (siehe §. 41.) senkrecht steht, so steht sie auch auf jeder durch den Schnittpunkt gehenden und in der Ebenen der Geraden liegenden andern Geraden senkrecht.

Man denke sich (zu besserem Verständniß siehe Fig. 2.) im Punkte **A** die Gerade **AB** auf den Geraden **AC** und **AD** senkrecht stehen, dann durch **AC** und **AD** die Ebene **ACD**, und macht **AC = AD**, zieht ferner in der Ebene die Gerade **CD**, welche die Endpunkte der Geraden **AC** und **AD** verbindet. Nun zieht man noch eine beliebige Gerade durch Punkt **A** der Ebene **ACD**, welche die Verbindungslinie **AC** in **E** schneidet, und beweist, daß **AB** auch senkrecht auf **AE** ist. Das Dreieck **CAD** ist nämlich gleichschenklig, folglich ist nach der Planimetrie

1) $AC^2 - AE^2 = CE.\ DE$*).

Ferner ist, wenn man **B** mit **C**, **D** und **E** verbindet, Dreieck **BAC** rechtwinklig und congruent mit **BAD**, also sind die Hypotenusen **BC** und **BD** einander gleich, demnach ist Dreieck **BCD**, auch gleichschenklig, also

2) $BC^2 - BE^2 = CE.\ DE.$

Aus Gleichung 1. und 2. folgt nun $BC^2 - BE^2 = AC^2 - AE^2$, und weil im rechtwinkligen Dreiecke **BAC** $BC^2 - AC^2 = AB^2$ ist, so hat man $AB^2 = BE^2 - AE^2$, somit ist Dreieck **BAE** in **A** rechtwinklig, folglich **AB** auf **AE** senkrecht, was zu erweisen war.

§. 44. Wenn eine Gerade auf zwei sie schneidenden Geraden senkrecht steht, so ist sie auf allen in der Ebene der letz-

---

*) Denn denkt man sich die Höhe **AH** in einem gleichschenkligen Dreieck **CAD** gezogen, so ist $AC^2 = AH^2 + \left(\frac{CD}{2}\right)^2$ und $AE^2 = AH^2 + EH^2$, hieraus $AC^2 - AE^2 = \left(\frac{CD}{2}\right)^2 - EH^2 = \left(\frac{CD}{2} + EH\right)\left(\frac{CD}{2} - EH\right)$ oder $AC^2 - AE^2 = CE.\ DE.$

Digitized by Google

tern liegenden Geraden senkrecht. Denn zieht man mit einer in der Ebene beliebig angenommene Geraden eine Parallele durch den Schnittpunkt der Ebene und Senkrechten, so ist letztere nach §. 43. zu der parallel gezogenen also auch zu der beliebig angenommenen Geraden selbst nach §. 42. senkrecht.

§. 45. Wenn eine Gerade eine Ebene schneidet und steht auf zwei nicht parallelen, sonst beliebigen, Geraden der Ebene senkrecht, so steht sie auf allen Geraden der Ebene senkrecht.

Denn zieht man durch den Schnittpunkt der Senkrechten und der Ebene zwei Geraden mit den in der Ebene liegenden Geraden parallel, so ist sie nach §. 42. auch zu diesen senkrecht, folglich nach §. 44. in allen in der Ebene liegenden Geraden. Wenn nun eine Gerade auf allen Geraden einer Ebene senkrecht steht, was aber der Fall ist, wenn sie nur auf zweien in dieser liegenden nicht parallelen Geraden senkrecht steht, so sagt man, sie *steht auf der Ebene senkrecht*.

§. 46. Durch einen Punkt ist nur ein Perpendikel auf eine Ebene zu construiren möglich.

Denn denkt man sich eine Ebene durch den Punkt und zwei von ihm als senkrecht zur Ebene angenommenen Geraden gelegt, so sind dieselben auch senkrecht auf der Schnittlinie beider Ebenen, und müssen deßhalb nach der Planimetrie, die hier gültig ist, zusammenfallen.

§. 47. Durch einen Punkt kann nur eine einzige Ebene gehen, die auf einer Geraden senkrecht steht.

Denn nimmt man zwei durch den Punkt gehende und auf der Geraden senkrecht stehende Ebenen an, und legt eine dritte Ebene durch die Gerade und den Punkt, so enthält dieselbe zwei vom Punkt ausgehende Schnittlinien, mit den zwei angenommenen Ebenen, welche auf der gegebenen Geraden senkrecht wären, was aber der Planimetrie widerspricht, und man kann somit nur *eine* Ebene als durch den Punkt gehend und auf der Geraden senkrecht stehend annehmen.

§. 48. Sämmtliche Geraden, die nach §. 41. in einem Punkt einer Geraden auf dieser senkrecht stehen, liegen in *einer* Ebene, die man den Ort dieser Geraden heißt.

Denn legt man durch je zwei eine Ebene, so steht diese auf der Geraden senkrecht, da es aber im Punkt nur *eine* Ebene

Digitized by Google

gibt, die auf ihr senkrecht steht, so decken sich sämmtliche, jedesmal durch ein Paar der Senkrechten gelegten Ebenen; es liegen also die Senkrechten selbst alle in einer Ebene.

§. 49. Eine Gerade, welche eine Ebene schneidet und nicht senkrecht zu ihr steht, heißt schief oder schräg zu der Ebene. Eine Schräge steht immer auf einer in der Ebene liegenden Geraden senkrecht, die man findet, wenn man sich durch den Schnittpunkt der Schrägen und Ebene eine zweite Ebene gelegt denkt, senkrecht zur Schrägen, und den Durchschnitt beider Ebenen sucht. Es steht nämlich die Schräge auf der zweiten Ebene, somit nach §. 46. auch auf der in dieser liegenden Durchschnittsgeraden senkrecht.

§. 50. Werden die Schnittpunkte eines Perpendikels und einer Schrägen zu einer Ebene in dieser mit einander durch eine Gerade verbunden, so steht die Verbindungsgerade auf der zur Schrägen gehörigen, in der Ebene liegenden senkrechten Geraden dann senkrecht, wenn sich Perpendikel und Schräge schneiden. Denn die zur Schrägen gehörige Senkrechte der Ebene steht auf dieser und dem Perpendikel senkrecht, somit auch auf der Ebene, welche die Schräge und den Perpendikel enthält, also auch auf dem Durchschnitt der beiden Ebenen, der aber offenbar die Verbindungsgerade der Schnittpunkte des Perpendikels und der Schrägen selbst ist. — In Fig. 2. sei z. B. **AB** der Perpendikel zur Ebene **ACD** und **BE** die Schräge, sowie **CD** die zur letzten gehörige Senkrechte in der Ebene, dann ist **CD** senkrecht auf **AB** und **BE**, also auch auf **AE**. —

§. 51. Umgekehrt, wenn die Verbindungslinie der Schnittpunkte einer Schrägen und eines Perpendikels auf einer Geraden der Ebene senkrecht steht, so ist diese Gerade die zur Schrägen gehörige Senkrechte in die Ebene, vorausgesetzt, daß Schräge und Perpendikel außer der Ebene sich schneiden. Beweis gerade so, wie der vorhergehende.

§. 52. Wenn eine von zwei parallelen Geraden zu einer Ebene senkrecht ist, so ist es auch die andere.

Denn legt man durch die Parallelen eine zweite, die erste schneidende Ebene, so stehen beide Geraden nach der Planimetrie auf der Schnittlinie senkrecht. Zieht man dann noch eine Gerade in der ersten Ebene senkrecht auf die Schnittlinie, so ist

Digitized by Google

dieſelbe, weil ſie es auf der Schnittlinie und der ſenkrechten Parallelen iſt, auch ſenkrecht auf der zweiten Ebene, ſomit auch auf der zweiten Parallelen, alſo ſteht letztere auf der Schnittlinie und der in der erſten Ebene gezogenen Geraden, ſomit auf der erſten Ebene ſelbſt ſenkrecht.

§. 53. Zwei Geraden, die auf einer Ebene ſenkrecht ſtehen, ſind parallel. Denn zieht man durch den Schnittpunkt der erſten eine Parallele zur andern, ſo iſt dieſe nach §. 52. auf der Ebene ſenkrecht, folglich fällt ſie mit der erſten Senkrechten nach §. 47. zuſammen; es ſind alſo die beiden Senkrechten parallel.

§. 54. Von einem Punkt außerhalb iſt der Weg zu einer Ebene auf dem Perpendikel kürzer als auf jeder Schrägen zu dieſer und auf einer Schrägen, die ihren Schnittpunkt näher als eine andere Schräge beim Fußpunkt des Perpendikels hat, kürzer als auf der zweiten Schrägen. Zwei Schräge, deren Schnittpunkt vom Fußpunkt gleichweit entfernt ſind, ſind gleich.

Denn denkt man ſich durch die Perpendikel und je eine Schräge eine Ebene gelegt, ſo erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke, die als gemeinſame Cathete die Perpendikellänge (vom gegebenen Punkt bis zum Fußpunkt) als andere Catheten die Entfernungen der Schrägenſchnittpunkte vom Perpendikelfußpunkt und als Hypotenuſe die Entfernungen vom Punkt bis zu den Schrägenſchnittpunkten haben, woraus nun leicht mit Hülfe der Planimetrie die Wahrheit des Satzes hervorgeht. Die kürzeſte Entfernung eines Punktes zu einem Ebenenpunkt heißt gemeinhin die Entfernung des Punktes zur Ebene.

Umgekehrt in einer Ebene gibt es nur einen Punkt, der zu einem Punkt außerhalb der Ebene eine kleinſte Entfernung hat. Es iſt dieß nämlich der Fußpunkt eines vom Außenpunkt auf die Ebene gezogenen Perpendikels.

§. 55. Eine Gerade, die auf einer Ebene ſenkrecht ſteht, iſt auch ſenkrecht zu einer zweiten Geraden, die zur Ebene parallel läuft. Denn legt man durch die zweite Gerade eine Ebene, die die gegebene ſchneidet, ſo iſt die Schnittlinie parallel zur zweiten Geraden. Auf der Schnittlinie ſteht die erſte Gerade ſenkrecht, ſomit auch nach §. 42. auf der zweiten Geraden.

Digitized by Google

§. 56. Sämmtliche Punkte einer Geraden, die zu einer Ebene parallel ist, haben gleiche Entfernung zu letzterer. Diese Entfernung nennt man die der Geraden zu der ihr parallelen Ebene.

Denn zieht man von zwei Punkten der Geraden Perpendikel auf die Ebene, so bilden diese mit dem zwischen den Punkten liegenden Geradenstücke und der Verbindung der zwei Fußpunkte ein Rechteck, in welchem die Perpendikellängen selbst als gegenüberstehende Seiten gleich sein müssen. — Und umgekehrt in einer Ebene ist nur eine Gerade möglich, die zu einer außer der Ebene liegenden und zu ihr parallelen eine solche Entfernung hat, daß sämmtliche andere Punkte der Ebene weiter von der Geraden entfernt sind.

§. 57. Eine Gerade, welche auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht ist, ist es auch auf der andern.

Die Gerade steht senkrecht auf allen Geraden der einen Ebene, auf der sie senkrecht angenommen wurde; nun kann man leicht in der zweiten Ebene zwei Geraden finden, die zu Geraden der ersten parallel sind; auf diesen steht die gegebene Gerade nun nach §. 42. auch senkrecht, somit ist sie es auch nach §. 45. auf der zweiten Ebene selbst. —

§. 58. Wenn eine Gerade auf zwei Ebenen senkrecht steht, so sind letztere parallel.

Denn man kann durch die Gerade zwei neue Ebenen legen, welche die zwei genannten schneiden. Die Schnittlinien jeder neuen Ebene mit den zwei alten sind aber, weil auf der Geraden senkrecht und in einer Ebene mit ihr liegend, parallel, somit sind es auch nach §. 37. die Ebenen.

§. 59. Zwei parallele Ebenen haben in allen Punkten gleiche Entfernung von einander. Der Beweis ist ganz leicht dem in §. 56. nachzubilden.

§. 60. Wenn von zwei sich schneidenden Ebenen erstere einen Perpendikel zur andern enthält, so hat auch die zweite einen Perpendikel zur erstern und jede Gerade der einen Ebene, welche zum Durchschnitt senkrecht ist, ist auch zur andern Ebene senkrecht; die beiden Ebenen selbst werden senkrecht auf einander genannt.

Digitized by Google

Denn denkt man sich den genannten Perpendikel in der ersten Ebene wirklich gezogen, so steht er auf der Schnittlinie senkrecht, sowie auf jeder Linie der zweiten Ebene, also auch auf allen Geraden der letztern, die zur Schnittlinie senkrecht sind, welche nun aber auch alle zur ersten Ebene Perpendikel sind.

§. 61. Wenn zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen, so liegt eine Gerade, die durch einen Punkt der ersten geht und auf der andern Ebene senkrecht steht, in ersterer Ebene.

Denn fällt man durch den Punkt der ersten Ebene, was jederzeit möglich, eine Senkrechte zur Kante, so ist dieß ein Perpendikel zur zweiten Ebene, fällt deßhalb nach §. 47. mit dem im Satz genannten Perpendikel zusammen und letzterer muß darum nothwendig in ersterer Ebene liegen.

§. 62. Zwei sich kreuzende Geraden haben in verschiedenen Punkten verschiedene Entfernung zu einander; ferner gibt es eine, aber auch nur eine Gerade, die auf beiden senkrecht steht und sie gleichzeitig schneidet und die Länge dieses beiden gemeinsamen Perpendikels zwischen seinen beiden Schnittpunkten ist die kürzeste Entfernung der beiden Geraden.

Es seien in Fig. 3. **AB** und **CD** die sich kreuzenden Geraden. Durch einen Punkt **A** der ersteren denke man sich die Gerade **AE** parallel zur zweiten, dann durch **AB** und **AE** eine Ebene gelegt, die nach § 11. zu **CD** parallel ist. Hierauf fällt man vom Punkt **C** einen Perpendikel **CF** auf die Ebene **ABE** und legt durch **CD** und **CF** eine Ebene **CDF**, die nach §. 60. senkrecht zur ersten Ebene **ABE** ist und sie längs einer Geraden **FG** schneidet, die nach §. 21 zu **CD**, folglich auch nach §. 26. zu **AE** parallel ist, somit von **AB** in einem Punkt **H** geschnitten wird. In **H** errichte man auf **FG** (also auch auf **CD**) den Perpendikel **HI**, der nach §. 60. zur Ebene **BAE** senkrecht ist; es steht also **HI** auf **CD** und **AB** senkrecht und schneidet beide und die Möglichkeit einer auf beiden senkrecht stehenden und sie gleichzeitig schneidenden Geraden ist dargethan. Daß es aber keine andere mehr gibt, leuchtet daraus hervor, daß jede Linie, die **AB** nicht in **H** schneidet, auch nicht auf den beiden sich kreuzenden Geraden gleichzeitig senkrecht sein und sie schneiden kann, in **H** aber **HI** die einzig mögliche ist. Daß ferner **HI** die

Digitized by Google

kürzeste Entfernung zweier Punkte der mehrgedachten Geraden ist, folgt einfach aus §. 54. —

§. 63. Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, die auf einer gegebenen senkrecht steht.

Man construirt eine Gerade, die durch den gegebenen Punkt geht und auf der gegebenen Ebene senkrecht steht. Eine jede Ebene, die diese Gerade enthält, ist nach §. 60. eine gesuchte. Es gibt unzählig viele.

§. 64. Eine Ebene soll gefunden werden, die durch eine gegebene Gerade geht und auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht.

Man construirt von irgend einem Punkt der gegebenen Geraden eine zweite Gerade senkrecht zur Ebene und legt durch beide Geraden eine Ebene, welche die gesuchte ist. Es gibt, wie aus §. 53. und §. 10 gefolgert werden kann, nur eine, sobald nicht die zwei Geraden zusammenfallen, d. h. die gegebene Gerade nicht senkrecht auf der Ebene steht.

§. 65. Einen Punkt finden, der von einer Ebene eine bestimmte Entfernung hat.

Man errichtet einen Perpendikel auf die gegebene Ebene, trägt von seinem Fußpunkt aus die gegebene Größe auf, was auf beiden Seiten der Ebene geschehen kann, wenn nicht hierüber schon bestimmt ist. Hierauf legt man durch den Endpunkt eine Ebene parallel zur gegebenen und jeder Punkt der letzteren ist nach §. 59. ein gesuchter. Man sagt deßhalb die gefundene Ebene ist der Ort sämmtlicher Punkte, die der Aufgabe entsprechen. Zieht man in dieser Ebene eine Gerade, so ist dieß eine, die zur gegebenen Ebene parallel läuft und den bestimmten Abstand hat.

§. 66. Eine Gerade finden, die zu einer gegebenen Geraden parallel geht und eine bestimmte Entfernung zu ihr hat. In jeder durch die gegebene Gerade gehenden Ebene gibt es eine nach der Planimetrie zu findende Gerade, die der Aufgabe entspricht. Sämmtliche Geraden liegen in einer Fläche, die man Kreis-Cylinder oder kurzweg Cylinder und die gegebene Gerade dessen Axe heißt; das Wort Kreis wird deßhalb vorgesetzt, weil sämmtliche Geraden eine auf der Axe (also auch nach §.

Digitized by Google

52. auf ihnen selbst) senkrecht stehende Ebene in Punkten schneiden, die in einem Kreis liegen, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Are und dessen Radius die gegebene Entfernung ist.

§. 67. Eine Gerade finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, eine zweite Gerade schneidet und einen bestimmten Winkel mit ihr macht.

a) Der gegebene Punkt liegt außer der Geraden. Man legt die Ebene durch, die von den gegebenen Größen bestimmt ist, und zieht vom gegebenen Punkt nach den Regeln der Planimetrie die gesuchte Gerade so, daß sie die gegebene unter dem bestimmten Winkel schneidet.

b) Der gegebene Punkt liegt in der Geraden.

Dann kann in jeder Ebene, die die Gerade, sowie ihren Punkt enthält, eine zweite Gerade gefunden werden, die der Aufgabe entspricht. Da es nun unzählig viele Ebenen gibt, die die Gerade enthalten, so findet man auch unzählig viele Geraden; diese bilden eine Fläche, welche man Kreiskonus, Kreiskegel oder kurzweg Konus und die gegebene Gerade dessen Are heißt. Das Wort Kreis wird deßhalb vorausgesetzt, weil eine zur Are senkrechte Ebene von den Geraden in einem Kreis geschnitten wird.

§. 68. Einen Punkt zu finden, der von einem gegebenen Punkt einen bestimmten Abstand hat.

Man legt durch den Punkt eine beliebige Ebene und zieht darin mit dem Abstand als Radius einen Kreis, dessen Centrum der gegebene Punkt ist, dann ist jeder Kreispunkt ein verlangter. In jeder Ebene, die durch den Punkt geht und deren gibt es unzählig viele, gibt es solche Kreise. Sämmtliche Kreise bilden eine Fläche, die man Kugelfläche heißt, deren Punkte alle vom gegebenen, dem Centrum, gleichweit entfernt sind.

§. 69. Eine Ebene finden, die zu einer Geraden parallel läuft und eine bestimmte Entfernung zu ihr hat.

Man sucht zuerst eine Gerade, die zur gegebenen parallel und die gehörige Entfernung hat, beide Geraden schneidet man hierauf durch eine dritte Gerade und zwar rechtwinklig, legt dann im Schnittpunkte der zweiten und dritten Geraden eine vierte auf beiden senkrecht, dann ist die Ebene der zweiten und vierten

Digitized by Google

Geraden, wie nach §. 56. folgt, die gesuchte. Es gibt deren unzählig viele, indem es eben so viele zweite Gerade gibt.

Kapitel III.

Von der Bestimmung der Neigung zweier sich schneidenden Ebenen und einer Geraden zu einer Ebene oder von dem Winkel dieser Gebilde zu einander.

§. 70. Wenn sich zwei Ebenen schneiden und man denkt sich die eine um die Durchschnittskante von ihrer Lage weggedreht, bis sie die Lage der andern einnimmt, so bestimmt die Größe der Drehung den Unterschied ihrer Lage oder den Winkel der beiden Ebenen. Die Ebenen heißt man Schenkel des Winkels. Die Winkeleinheit ist ähnlich wie bei dem Winkel zweier Geraden die Größe, um welche sich eine Ebene drehen muß, bis sie wieder in ihre erste Lage gelangt, und diese Einheit theilt man ab in 360 Grade, jeder Grad in 60 Minuten, und jede Minute in 60 Sekunden. Wenn der Winkel zweier Ebenen 90^0 beträgt, so heißt er ein Rechter.

§. 71. Wenn man in einem Punkte der Kante eines Ebenenwinkels in beiden Schenkelebenen je einen Perpendikel auf dieselbe fällt, so bilden diese Perpendikel einen Winkel, den man den Linienwinkel des Ebenenwinkels heißt, und der derselbe bei demselben Ebenenwinkel bleibt, wo auch der Punkt in der Kante angenommen wird, denn zwei Linienwinkel desselben Ebenenwinkels haben parallele Schenkel, sind somit nach §. 37. einander gleich. Die Schenkel eines Linienwinkels liegen in einer nach §. 45. auf der Kante senkrechten Ebene. Man sagt deßhalb auch, der Linienwinkel eines Ebenenwinkels ist der Winkel, den die Schnittlinien der zwei Schenkelebenen und einer auf ihrer Kante senkrechten Ebene mit einander machen.

§. 72. Zwei Ebenenwinkel, die einander gleich sind (congruent), haben gleiche Linienwinkel.

Denn zwei gleiche Ebenenwinkel sind, da an einem Ebenenwinkel nichts als seine Größe in Betrachtung kommt, identisch, somit sind es auch ihre Linienwinkel.

§. 73. Wenn zwei Ebenenwinkel gleiche Linienwinkel haben, so sind sie congruent.

Digitized by Google

Denn legt man die beiden Ebenenwinkel mit den einen Schenkelebenen und den Kanten auf einander, so fallen von den zwei nicht aufeinander liegenden Schenkelebenen die Schenkel der zwei gleichen Linienwinkel auf einander, folglich haben diese zwei Schenkelebenen die Kanten und zwei Geraden gemein, die die Kanten schneiden und müssen sich somit auch decken; somit liegen die Ebenenwinkel ganz aufeinander und sind also gleich (congruent).

§. 74. Zwei Ebenenwinkel verhalten sich wie ihre Linienwinkel.

Angenommen, die beiden Ebenenwinkel verhalten sich wie 2 : 3, so denkt man sich durch die Kante des erstern eine Ebene so gelegt, daß dieser in zwei gleiche Theile getheilt wird, alsdann muß man durch die Kante des größern zwei Ebenen legen können, die ihn in drei, den vorigen gleiche Theile theilen. Construirt man nun bei jedem Ebenenwinkel in dem nämlichen Punkt der gemeinschaftlichen Kante sämmtliche Linienwinkel der einzelnen Theile, so erhält man beim kleineren zwei, beim größeren drei nach §. 72. dieselben Linienwinkel. Die zwei Linienwinkel des kleineren Ebenenwinkels bilden aber dessen Linienwinkel, sowie die drei andern Linienwinkel den des größeren Ebenenwinkels bilden, also verhalten sich die Linienwinkel wie zwei zu drei, somit wie die Ebenenwinkel selbst. Wenn sich die Ebenenwinkel wie die ganzen Zahlen m : n verhalten, so ist der Beweis der nämliche, nur setze man überall statt 2 und 3, m und n. Verhalten sich die Ebenenwinkel wie zwei Brüche, z. B. wie $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, so verhalten sie sich wie $ad : bc$, also auch wie ganze Zahlen. Verhalten sie sich endlich wie zwei Irrationalzahlen, so denkt man sich statt dieser beliebig genäherte Decimalbrüche und es verhalten sich dann die Ebenen wie diese.

§. 75. Ein Ebenenwinkel hat so viele Grade, als sein Linienwinkel, man braucht also nur den letztern auf die in der Planimetrie gelehrte Weise zu messen und anzugeben, um die Größe des Ebenenwinkels durch Grade ꝛc. ausdrücken zu können.

Denn der Ebenenwinkel verhält sich nach §. 74. zu seiner Winkeleinheit, wie der Linienwinkel zu der seinigen. Beide Winkeleinheiten werden aber in 360 Grade ꝛc. getheilt, somit ist die

Digitized by Google

Anzahl der Grade eines Ebenenwinkels denen seines Linienwinkels gleich.

§. 76. Wenn sich 2 Ebenen schneiden, so bilden sich wie bei zwei sich schneidenden Geraden vier Winkel. Zwei, welche auf einer Seite der einen Ebene liegen, heißen Nebenwinkel und betragen zusammen 180^0, weil die Linienwinkel derselben so viel betragen. Sind die Nebenwinkel gleich, also jeder gleich 90^0, so heißt man sie Rechte. Die zwei Ebenenwinkel, welche an doppelt entgegengesetzten Seiten der Ebene liegen, heißt man, wie in der Planimetrie Scheitelwinkel und sind auch hier einander gleich wie dort, da es die Linienwinkel als Scheitelwinkel sind.

§. 77. Wenn zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen, so bilden sie rechte Winkel, da die Linienwinkel rechte sind, wie aus §. 60. leicht zu folgern ist.

§. 78. Zwei parallele Ebenen, geschnitten von einer dritten, bilden an den beiden parallelen Kanten mit der dritten jedesmal vier Winkel ganz ähnlich, sowie in der Planimetrie von zwei parallelen Geraden mit einer sie schneidenden dritten an jeden der zwei Schnittpunkte vier Winkel gebildet werden. Nämlich:

a) Zu jedem Winkel an der einen Kante gibt es einen an der andern, der auf derselben Seite der schneidenden Ebene und auf gleicher Seite der parallelen liegt. Solch ein Paar wollen wir gleichliegende nennen, es gibt 4 Paare.

b) Zu jedem Winkel an der einen Kante gibt es einen an der andern, der auf verschiedener Seite der Schnittebene und auf verschiedener Seite der parallelen liegt. Solch ein Paar wollen wir ungleichliegende nennen; deren gibt es 4 Paare.

c) Zu jedem Winkel an der einen Kante gibt es einen an der andern, der auf derselben Seite der schneidenden Ebene und auf verschiedener Seite der parallelen liegt; dann einen, der auf verschiedener Seite der schneidenden Ebene und auf gleicher Seite der parallelen liegt. Solch ein Paar wollen wir halbgleichliegende nennen; es gibt deren 8 Paare.

Legt man nämlich senkrecht auf eine der zwei parallelen Kanten (§. 27.) eine vierte Ebene, so steht dieselbe auch auf der andern Kante senkrecht (§. 52.) und schneidet die zwei pa-

Digitized by Google

rallelen Ebenen in zwei parallelen auf den Kanten senkrechten Geraden, die mit der Schnittlinie der dritten und vierten Ebene an jeder Kante die bezüglichen Linienwinkel bildet. Man erhält nun aus der Planimetrie leicht, daß der Linienwinkel eines Paares der gleichliegenden oder der ungleichliegenden Ebenenwinkel als selbst gleichliegend oder ungleichliegend einander gleich sind; von einem Paare halbgleichliegender Ebenenwinkel dagegen sind auch die Linienwinkel halbgleichliegend, es sind dieselben deßhalb Nebenwinkel. Hieraus folgt für die obengenannten Ebenenwinkel:

a) wenn gleichliegend, sind die zwei eines Paares einander gleich,

b) wenn ungleichliegend, sind die zwei eines Paares ebenfalls gleich und

c) wenn halbgleichliegend, sind die zwei eines Paares Nebenwinkel zu einander.

§. 79. Wenn man durch eine Schräge zu einer Ebene eine zweite Ebene legt, die auf der erstern senkrecht steht, so bildet die Schnittlinie beider Ebenen, die man den Riß der Schrägen auf die Ebene heißt, mit der Schrägen einen Winkel, welchen man den Winkel der Schrägen mit der Ebene nennt. In Figur 4. sei z. B. **OA** eine Schräge zur Ebene **BOC**, ferner sei Ebene **AOD** senkrecht zu **BOC** und **OD** die Durchschnittsgerade beider Ebenen oder der Riß der Schrägen **OA** zur Ebene **BOC**, somit **AOD** der Winkel der Schrägen und der Ebene. Ferner hat man folgende Sätze:

1) Zieht man durch den Schnittpunkt der Schrägen eine Gerade **OB** in der Ebene,

so macht diese Gerade mit der Schrägen einen größeren Winkel, als der Winkel der Schrägen zur Ebene ist.

Denn zieht man in Ebene **AOD** **AD** senkrecht auf **OD**, so ist **AD** senkrecht zur Ebene **BOC**; zieht man ferner **DB** senkrecht auf **OB**, verbindet dann **A** mit **B**, so ist nach §. 51.

und legt durch sie und die Schräge eine Ebene **AOB**, so ist der Winkel dieser Ebene und der gegebenen ein schiefer.

Denn der Linienwinkel von beiden Ebenen ist **ABD** und dieser ist kleiner als **ADB**, folglich spitz.

Digitized by Google

AB senkrecht auf OB. Wir haben somit die zwei rechtwinkligen Dreiecke AOB und AOD, die dieselbe Hypotenuse AO haben, da aber AB im Dreieck ABD als Hypotenuse größer ist als AD, so ist Winkel AOB größer als Winkel AOD.

2) Zieht man in der gegebenen Ebene auf der anderen Seite des Risses OD eine Gerade OC, die mit ihr denselben Winkel wie OB macht,

so ist auch der Winkel der Schrägen AO mit OC so groß als der mit OB, also AOC = AOB.

Denn macht man DC senkrecht auf OC und zieht AC, so ist Dreieck BOD congruent, dem Dreieck COD, folglich BD = CD und OB = OC. Dann sind die Dreiecke ABD u. ACD congruent, also auch AB = AC, hieraus folgt die Congruenz der Dreiecke AOB und AOC und so endlich die Gleichheit der Winkel AOB und AOC.

und legt durch diese und die Schräge ebenfalls wieder eine Ebene AOC, so macht diese mit der gegebenen Ebene denselben Winkel wie die in 1.) durch die Schräge und OB gehende.

Denn ACD ist der Linienwinkel der beiden Ebenen AOC und BOC und aus der Congruenz der Dreiecke ABD und ACD folgt die Gleichheit der Linienwinkel ABD und ACD.

3) Zieht man in der gegebenen Ebene durch den Schnittpunkt eine Gerade OE, die mit dem Riß der Schrägen OD einen größeren Winkel als OB oder OC macht,

so ist auch der Winkel der Schrägen OA mit der gezogenen OE größer als mit OB oder OC.

Denn zieht man auf OE von D die Senkrechte DE, so haben die beiden rechtwinkligen Dreiecke BOD und EOD dieselbe Hypotenuse OD. Der Winkel EOD

und legt durch AO dun die gezogene Gerade OE eine Ebene, so macht diese mit der gegebenen Ebene einen kleineren Winkel, als die durch die Schräge und OB oder OC gehende.

Denn AED ist der Linienwinkel. In den rechtwinkligen

Digitized by Google

ist größer als **BOD**, folglich auch die Kathete **OB** größer als **OE**. Zieht man noch **AE**, so hat man die rechtwinkligen Dreiecke **AOB** und **AOE** mit derselben Hypotenuse **AO** und weil Kathete **OB** größer als **OE**, also **AE** größer als **AB** ist, muß Winkel **AOE** größer als **AOB** seyn.

Dreiecken **AED** und **ABD** ist **AD** gemeinsame Kathete, aber Hypotenuse **AE** größer als **AB**, somit Winkel **AED** kleiner als **ABD**.

4) Ist eine in der Ebene gezogene Gerade **OF** zum Riß der Schrägen, d. h. zu **OD** senkrecht, so macht die Schräge mit der gezogenen einen rechten Winkel nach §. 52.

und legt durch sie und die Schräge eine Ebene, so bildet die letztere mit der gegebenen den kleinst möglichsten Winkel, der dann gleich ist dem Winkel der Schrägen und der Ebene. Daß der Winkel der Ebene **AOF** und der gegebenen der kleinste Winkel sein muß, folgt aus 3.), weil die gezogene Gerade **OF** dann mit **OB** den größten Winkel macht, nämlich einen rechten, dieser Winkel hat ferner **AOB** als Linienwinkel, also ist er dem Winkel der Schrägen und der Ebene gleich.

Diese Sätze lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

Eine Schräge zu einer Ebene macht mit verschiedenen Geraden derselben verschiedene Winkel. Der kleinste von allen ist derjenige, den sie mit ihrem Riß macht, und diesen nennt man auch den Winkel der Geraden und der Ebene. Eine Schräge macht mit zwei Geraden, die zu dem Riß der Schrägen gleichgeneigt sind, dieselben Winkel, mit einer dritten Geraden der Ebene aber, die zum Riß eine größere Neigung hat, macht sie auch einen größeren Winkel. Ferner

Digitized by Google

Verschiedene Ebenen, welche durch eine zu einer Ebene schräg stehenden Gerade gelegt sind, machen mit der Ebene verschiedene Winkel. Wenn die Schnittlinien zweier solcher Ebenen zu dem Riß der Schrägen gleiche Neigung haben, so machen die Ebenen selbst mit der gegebenen gleiche Winkel; hat aber die Schnittlinie einer dritten Ebene zu dem Riß eine größere Neigung, so macht die dritte Ebene selbst mit der gegebenen einen kleineren Winkel; kleiner kann dieser Winkel jedoch nicht werden, als der, den die Schräge mit der Ebene macht; dieß wird indessen nur dann Statt haben, wenn die dritte Ebene ihre Schnittlinie senkrecht auf dem Riß der Schrägen hat.

§. 80. Aus dem vorigen Satze kann man ohne Schwierigkeit leicht auch nachstehenden umgekehrten beweisen:

Wenn eine zu einer Ebene schräg stehende Gerade mit zwei Geraden derselben gleiche Winkel macht, so macht auch der Riß der Schrägen mit den Geraden gleiche Winkel, macht dagegen die Schrägen mit einer dritten Geraden der Ebene einen größeren Winkel, so macht ihr Riß mit ihr ebenfalls einen größeren Winkel.

Wenn zwei Ebenen durch eine Schräge zu einer gegebenen Ebene gelegt werden, so daß sie mit derselben gleiche Winkel machen, so machen auch die beziehlichen Durchschnittsgeraden mit dem Riß der Schrägen zur gegebenen Ebene gleichen Winkel; macht aber eine dritte Ebene, die durch die Schräge geht, einen kleineren Winkel mit der gegebenen Ebene, so hat die Durchschnittsgerade zu dem Riß der Schrägen eine größere Neigung.

§. 81. Wenn zwei Schrägen durch einen Punkt einer Ebene gehen, auf der nämlichen Seite derselben liegen, und gemeinschaftlichen Riß haben, so macht diejenige, welche zur Ebene die größere Neigung hat, auch mit einer beliebigen Gerade der Ebene einen größeren Winkel.

Denn es stellt Fig. 5. **OD** den Riß der Geraden **OA** auf die Ebene **AOD** vor; ist nun **OA'** eine in der Ebene **AOD** liegende Gerade, die mit **OD** einen größern Winkel macht, als **OA**, so macht sie ihn auch nach §. 79. mit **OA**.

§. 82. Wenn eine von zwei sich schneidenden Geraden auf einer Ebene senkrecht steht, so macht die andere mit der Ebene

Digitized by Google

einen Winkel, der zum Winkel der Geraden complementar ist. Beweis ist leicht aus Fig. 4. zu finden, indem AOD + OAD = 90° ist.

§. 83. Wenn eine von zwei sich schneidenden Ebenen auf einer Geraden senkrecht steht, so macht die andere Ebene mit der Geraden einen Winkel, der zum Ebenenwinkel complementar ist.

In Fig. 6. sei ABC die eine Ebene, welche auf der Geraden CD senkrecht steht, und ABD sei die andere Ebene, die die erste längs AB schneidet.

Wir nehmen nun an, die Gerade schneidet die erste Ebene in Punkt C, und die andere in D; zieht man nun von C auf AB den Perpendikel CE und verbindet E mit D, so ist nach §. 51. DE auch auf AB senkrecht, also ist CED der Linienwinkel der Ebene, ferner ist nach §. 79. CDE der Winkel der Geraden CD und der Ebene ABD; beide genannte Winkel sind aber, wie leicht zu sehen, Complementswinkel, was zu beweisen war.

§. 84. Wenn in einem Punkt der Kante zweier sich schneidenden Ebenen auf diese zwei Perpendikel gefällt werden, so machen die Stücke der Perpendikel, welche jedesmal auf der Außenseite der ihnen zugehörigen Ebene liegen, einen Winkel, der zu dem Winkel der Ebene selbst supplementar ist.

Es seien Fig. 7. ABC und ABD die Ebenen, AB ihre Kante und in Punkt A sei AE der Perpendikel auf ABC und liege auf der Außenseite der Ebene, d. h. auf der nicht in den Winkel hinein gerichteten Seite. Ebenso sei AF der Perpendikel zur Ebene ABD. Man denke sich durch beide Perpendikel eine dritte Ebene gelegt; diese steht auf der Kante AB senkrecht und ihre Schnittlinien AC und AD mit beiden Ebenen bilden somit den Linienwinkel CAD, der aber, wie leicht zu sehen ist, mit EAF zwei Rechte macht, wie zu beweisen ist.

§. 85. Eine Ebene und eine Schräge ist gegeben; man soll in der Ebene eine Gerade ziehen, die mit der Schrägen einen bestimmten Winkel macht.

In Fig. 8a. sei OA die Schräge und OBC die Ebene, so zieht man AD senkrecht zur Ebene. Mit OA = O'A'

Digitized by Google

als Hypotenuse und dem gegebenen Winkel als spitzen (ist der gegebene Winkel ein stumpfer, so nimmt man seinen spitzen Nebenwinkel) construirt man Fig. 8b ein rechtwinkliges Dreieck $A'O'B'$, als Hülfsfigur. Mit der dem gegebenen Winkel als Kathete gegenüberstehenden Seite $A'B'$ und der zuerst gefundenen Länge $AD = A'D'$, erstere als Hypotenuse, letztere als Kathete genommen, wird ein zweites rechtwinkliges Dreieck $A'B'D'$ construirt; man erhält nun als zweite Kathete die Länge $B'D'$. Mit dieser, als Radius, construirt man nun in der gegebenen Ebene Fig. 8a. vom Fußpunkt D der Senkrechten AD aus als Centrum einen Kreis, zieht vom Schnittpunkt AO an diesen Kreis die möglichen zwei Tangenten, OB und OC, so sind dieß, wie wir jetzt nachweisen werden, zwei der Aufgabe entsprechende Geraden.

Zieht man den Radius BD und die Gerade AB, so ist Dreieck ABD dem Hülfsdreieck $A'B'D'$ congruent, denn $AD = A'D'$, $BD = B'D'$, und Winkel bei D und D' sind rechte. Also ist auch $AB = A'B'$. Nun ist aber auch das Dreieck AOB dem Hülfsdreieck $A'O'B'$ congruent, somit Winkel $AOB = A'O'B'$, letzterer aber ist der gegebene.

Sobald $B'D' = OD$ wird, gibt es nur eine Tangente, dann ist die Aufgabe eindeutig. Sobald $B'D$ größer als OD ist, gibt es keine Tangente dann ist die Aufgabe unauflösbar. Beide Fälle treten übrigens nicht nur als Folge der Auflösungsweise ein, sondern es kann in der That in ersterem Fall nur *eine* und in letzterem Falle *keine* Auflösung geben. Denn im ersteren Falle ist der gegebene Winkel dem Winkel der Schrägen gleich und im letzteren Falle noch kleiner; einen kleineren Winkel kann aber nach §. 79. keine in der Ebene liegende Gerade mit der Schrägen machen.

§. 86. Durch eine Gerade eine Ebene legen, die zu einer gegebenen Ebene unter einem bestimmten Winkel geneigt ist.

a) Die gegebene Gerade AB liegt in der gegebenen Ebene ABC. Man construirt mit dem gegebenen Winkel $C'A'D'$ Fig. 9b (oder wenn stumpf, mit seinem Nebenwinkel) ein rechtwinkliges Hülfsdreieck $C'A'D'$ von beliebigen Seiten.

Digitized by Google

In der gegebenen Ebene BAC Fig. 9a errichtet man beliebig wo in A auf die Gerade AB eine Senkrechte AC, und macht sie vom Fußpunkt aus so lange, als die an dem gegebenen Winkel im Hülfsdreieck liegende Kathete A′C′. Im erhaltenen Endpunkt C der Senkrechten errichtet man auf die gegebene Ebene eine Senkrechte CD, und macht diese so groß als die andere Kathete C′D′ des Hülfsdreiecks. Der dadurch erhaltene Endpunkt D und die gegebene Gerade AB bestimmen die gesuchte Ebene. Es gibt zwei Ebenen, die der Aufgabe entsprechen, je nach der Seiten der gegebenen Geraden, wohin die Senkrechte gerichtet wird.

b) Die gegebene Gerade DE ist zur gegebenen Ebene ABC parallel.

Man ziehe von einem Punkt D Fig. 10 der Geraden DE einen Perpendikel CD zur Ebene und construirt mit der so erhaltenen Entfernung CD des Punktes zur Ebene als Kathete und dem gegebenen Winkel als gegenüberstehenden ein rechtwinkliges Hülfsdreieck C′A′D′. Mit der andern erhaltenen Kathete A′C′ als Radius, zieht man vom Fußpunkt C des Perpendikels als Centrum einen Kreis, und zieht an diesem parallel zur gegebenen Geraden die zwei Tangenten AB. Jede Tangente und die gegebene Gerade bestimmen die gesuchte Ebene und es gibt deren somit immer zwei.

c) Die gegebene Gerade schneidet die gegebene Ebene.

Man fällt Fig. 11. von einem beliebigen Punkt D einen Perpendikel DC auf die Ebene, macht wie in b) einen Kreis, zieht aber vom Schnittpunkt B der Schrägen und Ebenen die Tangenten AB, welche mit der Geraden die gesuchte Ebene bestimmen. Daß es hier oft nur eine und unter Umständen keine Ebene gibt, geht aus §. 79. und §. 80. hervor. —

Der Beweis ist für alle drei Fälle unschwer zu führen. Im Dreiecke CAD ist Winkel CAD, wie jedesmal leicht nachzuweisen ist, der Linienwinkel der gegebenen und gefundenen Ebene; und da die Dreiecke CAD und C′A′D′ congruent, und folglich die

Digitized by Google

Winkel CAD und C'A'D' gleich sind, letzterer aber der gegebene Winkel ist, so haben die beiden Ebenen die geforderte Neigung zu einander.

§. 87. Durch einen Punkt eine Gerade legen, die eine gegebene Ebene unter einem bestimmten Winkel schneidet.

Man legt durch den Punkt zuerst einen Perpendikel zur Ebene und dann eine Gerade, die mit diesem den Complementswinkel zum gegebenen Winkel macht, so ist letztere die gesuchte. Beweis leicht zu führen. Es gibt unzählig viele Gerade; sämmtliche liegen nach §. 67. auf einer Kegelfläche.

§. 88. Ein Punkt und eine Gerade ist gegeben, durch den Punkt eine Ebene zu legen, die mit der Geraden einen bestimmten Winkel macht.

Man legt durch den Punkt eine zweite Gerade, die die erste schneidet und mit ihr den bestimmten Winkel macht; hierauf zieht man im Durchschnitt der beiden Gerade eine dritte Gerade, die auf beiden senkrecht steht; dann ist die Ebene der beiden gezogenen Geraden die gesuchte. Der Beweis für dieses Verfahren ist leicht zu finden, sowie auch, daß es nur eine Ebene gibt, wenn der gegebene Punkt außerhalb der gegebenen Geraden liegt, und unendlich viele, wenn der Punkt in der Geraden liegt.

Kapitel IV.

Nachtrag verschiedener Sätze und Aufgaben über die Lage von Geraden und Ebenen.

§. 89. Eine Ebene kann auf folgende Weise durch die Bewegung einer Geraden erzeugt werden.

1) Wenn sich eine Gerade um einen Punkt so dreht, daß sie eine andere Gerade nicht verläßt;
2) Wenn sich eine Gerade so bewegt, daß sie zwei sich schneidende oder zwei parallele Geraden stets trifft.
3) Wenn eine Gerade an einer andern Geraden so fortrückt, daß sie stets zu sich selbst parallel bleibt.
4) Wenn sich eine Gerade so um einen Punkt dreht, daß sie stets zu einer Ebene parallel bleibt;
5) Wenn sich eine Gerade so um einen Punkt dreht, daß sie zu einer zweiten Geraden senkrecht bleibt.

Digitized by Google

In den zwei ersten Fällen denkt man sich durch die gegebenen Stücke eine Ebene gelegt, dann hat die sich bewegende oder Erzeugungsgerade in jeder Lage zwei Punkte mit dieser Ebene gemein, muß also dieselbe erzeugen.

Im dritten Falle denkt man sich durch zwei Lagen der Erzeugungsgeraden eine Ebene gelegt; in dieser liegt dann die gegebene Gerade und es hat jede andere Lage der erzeugenden einen Punkt der gegebenen Geraden mit dieser Ebene gemein, liegt somit nach §. 10. in ihr und erzeugt dieselbe durch ihre Bewegung. Die Beweise für die zwei letzten Fälle folgen einfach aus §. 30. und §. 48.

§. 90. Drei Ebenen schneiden sich entweder in einer Geraden, die ihnen dann allen drei gemeinsam ist, oder in zwei oder in drei parallelen Geraden, oder in drei sich in einen Punkt, der allen drei Ebenen gemein ist, schneidenden Geraden.

Denn schneiden sich die zwei ersten Ebenen, so kann die dritte Ebene

a) die Durchschnittsgerade der zwei ersten enthalten, erster Fall;

b) mit der Durchschnittsgeraden der zwei ersten parallel sein, dritter Fall;

c) die Durchschnittsgeraden schneiden, vierter Fall.

Schneiden sich aber die zwei ersten Ebenen nicht, sondern sind parallel, so kann die dritte mit ihr nur zwei Parallelen gemein haben, zweiter Fall.

§. 91. Wenn sich zwei Ebenen schneiden und es läuft eine Gerade der einen Ebene parallel zur andern, so ist die Gerade parallel zur Schnittlinie.

Denn schneiden kann die gedachte Gerade die Kante nicht, weil sie sonst nicht zur zweiten Ebene parallel sein könnte; kreuzen können sich die Geraden nicht, weil sie in erster Ebene liegen, müssen somit parallel sein.

§. 92. Eine Gerade, die von einer Ebene in zwei Punkten gleiche Entfernung hat (in der nämlichen Richtung gemessen), ist zur Ebene parallel. Der Beweis ist analog dem in §. 56.

§. 93. Eine Ebene, die von einer andern in drei Punkten, die nicht in einer Geraden liegen, gleich weit entfernt ist, ist zur andern parallel.

Digitized by Google

Denn durch die drei Punkte kann man zwei sich schneidende Geraden legen, die aber nach §. 92. zur Ebene parallel sind, folglich ist dann auch nach §. 17. die Ebene, welche die drei Punkte enthält, selbst zur Ebene parallel.

§. 94. Zwei parallele Geraden machen mit einer gegebenen Ebene gleiche Winkel.

Denn zieht man von einem Punkt jeder Geraden je einen Perpendikel auf die Ebene, so sind dieselben nach §. 53. parallel; die beiden auf der gegebenen senkrechten Ebenen, die nun unsere Geraden enthalten, sind nach §. 37. parallel, haben somit parallele Schnittlinien, woraus endlich nach §. 37. die Gleichheit der Winkel hervorgeht.

§. 95. Zwei Ebenen, welche gleiche Winkel machen mit einer dritten Ebene, sind parallel, wenn ihre Schnittlinien parallel sind.

Denn, wenn die Schnittlinien parallel sind, so steht ein und dieselbe Ebene auf beiden senkrecht, und es liegen daher auch die Linienwinkel beider in dieser Ebene; die einen Schenkel derselben liegen in der Kante der senkrechten mit der dritten Ebene und bilden eine Gerade, folglich müssen die andern Schenkel der gleichen Linienwinkel parallel sein, woraus mit Hülfe des Satzes 37. die Richtigkeit unseres Satzes leicht erkannt wird.

§. 96. Bei zwei sich schneidenden Ebenen ist der Linienwinkel der größte Winkel, den eine Gerade der einen Ebene mit der andern Ebene machen kann.

Denn zieht man von einem Punkt der einen Ebene einen Perpendikel auf die andere, so bilden jede in der ersten Ebene von diesem Punkt zur Kante gezogene beliebige Gerade als Hypotenuse und den Perpendikel beständig als Kathete genommen, ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die andere Kathete jedesmal den Riß der in der ersten Ebene gezogenen Gerade bezüglich der zweiten Ebene vorstellt. Diese Kathete ist offenbar am kleinsten, wenn sie auf der Kante der Ebene senkrecht steht, dann aber bildet sie mit der in erster Ebene gezogenen Geraden den Linienwinkel der Ebene. Nach dem Satze nun, daß bei zwei rechtwinkligen Dreiecken, welche eine Kathete gleich haben, der dieser Kathete gegenüberliegende Winkel in einem größer ist, wenn die

Digitized by Google

andere Kathete desselben kleiner als in dem zweiten Dreieck ist, geht der Satz leicht hervor.

§. 97. Die Stücke zweier Geraden zwischen drei sich schneidenden parallelen Ebenen haben gleiches Verhältniß zu einander. Sind Fig. 12. A_1, A_2 und A_3 die drei Punkte der einen Geraden, in welchem sie die drei Ebenen schneidet und B_1, B_2, B_3 die der andern, so soll sein $\frac{A_1\ A_2}{A_2\ A_3} = \frac{B_1\ B_2}{B_2\ B_3}$. Man denke sich von A_1 nach B_3 eine Gerade gezogen, welche die zweite Ebene in C_2 schneidet, so kann man durch $A_1\ A_3$ und $A_1\ B_3$ eine Ebene legen, die die zweite in $A_2\ C_2$ und die dritte in $A_3\ B_3$ schneidet, wobei nach §. 27. $A_2\ C_2$ parallel zu $A_3\ B_3$ ist. Deßhalb ist nach der Planimetrie $\frac{A_1\ A_2}{A_2\ A_3} = \frac{A_1\ C_2}{B_3\ C_2}$

ebenso beweist man $\frac{A_1\ C_2}{B_3\ C_2} = \frac{B_1\ B_2}{B_2\ B_3}$; hieraus folgt

$$\frac{A_1\ A_2}{A_2\ A_3} = \frac{B_1\ B_2}{B_2\ B_3}.$$ w. z. b. w.

Ueber die Lage dreier Gebilde, die entweder Geraden oder Ebenen sein können, lassen sich schließlich folgende Sätze aufstellen, von denen übrigens mehrere bereits schon früher vorkommen, und hier nur der Ordnung wegen nochmals mit aufgeführt werden.

§. 26.

Eine Gerade mit zwei andern parallel, dann sind auch letztere unter sich parallel.

§. 28.

Eine Ebene ist mit zwei andern Ebenen parallel; dann sind auch die letztern unter sich parallel.

§. 98.

Eine Gerade ist mit einer zweiten parallel und schneidet eine dritte, dann können sich die letztern schneiden oder kreuzen, aber nicht parallel sein.

§. 99.

Eine Ebene ist zu einer zweiten parallel und schneidet eine dritte, dann schneiden sich auch die zwei letztern.

Digitized by Google

Denn denke man sich die zwei ersten in eine Ebene gelegt, so kann die dritte auch in dieser liegen, alsdann muß dieselbe auch die andere schneiden. Liegt sie aber nicht in der Ebene, so schneidet sie dieselbe, weil sie mit der ersten Geraden einen Punkt gemein hat; dann kann sie mit der zweiten nicht parallel sein und sie auch nicht schneiden.

Denn durch die Gerade, welche die erste und dritte gemein haben, kann nur eine Ebene parallel zur zweiten gehen; die dritte Ebene muß somit, da sie mit der ersten nicht zusammen fallen soll, die zweite schneiden.

§. 42.

Eine Gerade ist parallel zu einer zweiten und senkrecht zu einer dritten. Dann sind auch die beiden letztern zu einander senkrecht.

§. 100.

Eine Ebene ist parallel zu einer zweiten und senkrecht zu einer dritten, dann sind auch die zwei letzten auf einander senkrecht.

§. 101.

Wenn eine Gerade auf zwei andern senkrecht steht, so können die letztern entweder parallel sein oder sich schneiden, oder sich kreuzen.

§. 102.

Wenn eine Ebene auf zwei andern Ebenen senkrecht steht, so können die letztern parallel sein, oder sich schneiden. Sie müssen parallel sein, wenn es die Schnittlinien der ersten Ebene mit jeder der letztern sind, wie leicht aus §. 95. nachzuweisen ist. —

Schneiden sich die beiden letzteren Ebenen, so ist die Schnittlinie auf erster Ebene senkrecht.

Denn die in erster Ebene liegenden Schnittlinien schneiden sich in einem Punkt und wenn man in diesem Punkt eine Senkrechte

Digitized by Google

zur ersten Ebene errichtet, so muß sie nach §. 61. in jeder der letztern Ebene liegen; sie fällt also mit der Schnittlinie der zwei letzten Ebenen zusammen, also steht diese auf der ersten Ebene senkrecht.

§. 103.

Eine Gerade ist zu einer zweiten Geraden und zu einer Ebene parallel, dann ist die zweite Gerade auch mit der Ebene parallel.

Denn die Ebene enthält jedenfalls eine Gerade, die zur ersten, also auch nach §. 26. zur zweiten Geraden parallel ist, somit ist die Ebene nach §. 11. auch zur zweiten Geraden selbst parallel.

§. 104.

Eine Ebene ist zu einer zweiten Ebene und zu einer Geraden parallel; dann ist die zweite Ebene auch zur Geraden parallel.

Beweis ganz ähnlich dem in §. 103.

§. 105.

Eine Gerade und eine Ebene, welche zu einer andern Geraden parallel sind und einen Punkt mit einander gemein haben, fallen zusammen.

Denn nach dem Vorhergehenden können sie sich nicht schneiden. Da sie aber schon einen Punkt gemein haben, und dabei nicht parallel sind, so müssen sie zusammenfallen.

§. 106.

Eine Ebene und eine Gerade, welche zu einer anderen Ebene parallel sind und einen Punkt mit einander gemein haben, fallen zusammen.

Beweis wie in §. 105.

§. 107.

Eine Gerade ist zu einer andern parallel und schneidet eine Ebene, dann schneidet auch die zweite Gerade die Ebene.

§. 108.

Eine Ebene ist zu einer andern parallel und wird von einer Geraden geschnitten, dann wird auch die zweite Ebene von der Geraden geschnitten.

Digitized by Google

Denn man kann sich durch die zwei Geraden eine Ebene denken, welche die gegebene schneiden muß, da nun die erste Gerade die Schnittlinie schneidet (§. 20), so muß es auch die zweite thun, also schneidet diese die gegebene Ebene auch.

§. 52.

Eine Gerade ist parallel mit einer zweiten und steht gleichzeitig auf einer Ebene senkrecht, dann steht auch die zweite Gerade auf der Ebene senkrecht.

§. 46.

Eine Gerade schneidet eine andere und steht senkrecht auf einer Ebene, dann kann die andere Gerade nicht senkrecht auf der Ebene stehen.

§. 109.

Eine Gerade ist auf einer andern senkrecht, und steht zugleich auf einer Ebene senkrecht, dann ist die zweite Gerade zur Ebene parallel.

Denn die zweite Gerade liegt in einer zur ersten Geraden senkrechten Ebene; diese muß nach §. 58. mit der gegebenen Ebene parallel sein; folglich ist die Gerade zur Ebene parallel.

Denn die Gerade kann zur zweiten Ebene nicht parallel sein, ohne es nach §. 104. auch mit erster zu sein, folglich muß die Gerade die zweite Ebene schneiden.

§. 57.

Eine Ebene ist parallel mit einer zweiten und steht auf einer Geraden senkrecht, dann steht auch die zweite Ebene auf der Geraden senkrecht.

§. 47.

Zwei Ebenen schneiden sich; die eine steht senkrecht auf einer Geraden; dann kann die andere Ebene nicht auch zur Geraden senkrecht sein.

§. 110.

Eine Ebene ist auf einer andern senkrecht und zugleich auf einer Geraden, dann ist die zweite Ebene zur Geraden parallel.

Errichtet man in der zweiten Ebene einen Perpendikel auf die erste, so ist er mit der Geraden nach §. 53. parallel, also ist es auch nach §. 11. die Ebene.

Digitized by Google

§. 111.

Eine Gerade ist parallel zu einer Ebene und eine zweite Gerade schneidet die Ebene, dann können die Geraden nicht parallel sein.

Wären sie parallel, so könnte nach §. 103. die zweite Gerade die Ebene nicht schneiden.

§. 112.

Eine Ebene ist parallel zu einer Geraden und eine zweite Ebene wird von der Geraden durchschnitten, dann schneiden sich die Ebenen.

In der ersten Ebene kann man sich eine Gerade zur gegebenen Geraden parallel denken, welche nach §. 107. die zweite Ebene schneidet, also muß auch die erste Ebene die zweite schneiden.

§. 55.

Eine Gerade ist parallel zu einer Ebene und eine zweite Gerade steht senkrecht auf der Ebene, dann sind die Geraden auf einander senkrecht.

§. 113.

Eine Ebene ist parallel zu einer Geraden und eine zweite Ebene ist senkrecht zur Geraden, dann sind die beiden Ebenen aufeinander senkrecht.

Die erste Ebene enthält eine parallele Gerade zur gegebenen Geraden, die nach §. 52. auf der zweiten Ebene senkrecht steht, also sind die beiden Ebenen selbst auf einander senkrecht.

§. 53.

Zwei Geraden, die auf einer Ebene senkrecht stehen, sind parallel.

§. 58.

Zwei Ebenen, die auf einer Geraden senkrecht stehen, sind parallel.

Digitized by Google

Kapitel V.

Verschiedene Aufgaben zur Einübung der vorhergehenden Sätze.

§. 114. Es sind drei Punkte gegeben, man soll drei parallele Geraden durch sie legen, die in einer Ebene liegen.

Man legt eine Ebene durch die Punkte und zieht in dieser die parallelen Geraden.

§. 115. Eine Gerade und zwei Punkte sind gegeben; man soll untersuchen, ob die gegebenen Stücke in einer Ebene liegen.

Man zieht durch die zwei Punkte eine Gerade, schneidet diese Gerade die Gegebene, oder sind beide Geraden parallel, so liegen die Stücke in einer Ebene.

§. 116. Ein Punkt und zwei Geraden sind gegeben; man soll eine Gerade finden, welche den Punkt enthält und die Geraden schneidet.

a) Die Gerade und der Punkt liegen in einer Ebene. Dann gibt es unzählig viele nach der Planimetrie zu findenden Geraden, die der Aufgabe entsprechen.

b) Die Geraden liegen in einer Ebene, der Punkt außerhalb. Wenn sich die Geraden schneiden, so zieht man vom Punkt zum Schnittpunkt der Geraden eine neue Gerade und dieß ist die verlangte. Sind die Geraden parallel, so ist die Aufgabe unmöglich, indem die zu findende Gerade in der Ebene der gegebenen liegen müßte, dann aber nicht den Punkt enthalten könnte.

c) Die Geraden kreuzen sich. Man legt durch den Punkt und eine Gerade eine Ebene und sucht den Schnittpunkt derselben mit der andern Geraden. Durch den Schnittpunkt und den gegebenen zieht man in der Ebene eine neue Gerade, wenn diese die in der Ebene liegende gegebene Gerade schneidet, so ist es die gesuchte, ist sie aber zu ihr parallel, so ist die Aufgabe unmöglich.

§. 117. Ein Punkt und zwei Geraden sind gegeben; man soll eine neue Gerade finden, die mit je einer der Geraden in einer Ebene liegt.

Digitized by Google

Man legt durch den Punkt und je eine Gerade Hülfsebenen. Diese schneiden sich in einer den Punkt enthaltenden Geraden, die die verlangte ist.

§. 118. Ein Punkt und zwei Geraden sind gegeben; man soll eine Ebene finden, die mit beiden parallel ist und durch den Punkt geht.

Man zieht durch den Punkt zwei Hülfsgeraden zu den gegebenen Geraden parallel, so bestimmen diese die gesuchte Ebene. Sind aber die gegebenen Geraden parallel, so sollen die zwei Hülfsgeraden zusammen und jede Ebene, die diese enthält, ist eine der Aufgabe entsprechende.

§. 119. Ein Punkt nnd zwei Geraden sind gegeben; man soll eine neue Gerade finden, die auf den beiden ersten senkrecht steht und durch den Punkt geht.

a) Die gegebenen Stücke liegen in einer Ebene, dann läßt die Aufgabe sich leicht lösen nach der Planimetrie.

b) Die Geraden liegen in einer Ebene und der Punkt außerhalb derselben.

Man legt durch den Punkt eine Gerade, welche auf dieser Ebene senkrecht steht, das ist dann die verlangte.

c) die Geraden kreuzen sich.

Wird durch eine der Geraden eine Ebene parallel zur andern gelegt und vom gegebenen Punkt auf diese Ebene ein Perpendikel gefällt, so ist dieser nach §. 55. und 45. der gesuchte.

§. 120. Ein Punkt ist gegeben und zwei Geraden, eine Ebene zu finden, die auf beiden Geraden senkrecht steht.

Man legt durch den Punkt eine Ebene senkrecht auf die erste Gerade, ist nun die zweite Gerade parallel zur ersten, so steht sie auch auf der Ebene senkrecht; ist dieß nicht der Fall, so ist die Aufgabe unmöglich.

§. 121. Ein Punkt, eine Gerade und eine Ebene sind gegeben; man soll eine Gerade suchen, welche durch den Punkt geht, die gegebene Gerade schneidet und zur Ebene parallel läuft.

Man legt durch den Punkt und die Gerade eine Ebene, in dieser liegt die gesuchte Gerade; ist die Ebene zur gegebenen Ebene parallel, so ist jede Gerade, die in ihr den Punkt enthält, eine gesuchte. Schneiden sich aber die beiden Ebenen, so

Digitized by Google

zieht man in der Hülfsebene durch den Punkt eine zur Schnittlinie der beiden Ebenen parallele Gerade, welche die verlangte mit Ausnahme des Falles ist, daß die gegebene Gerade zur Schnittlinie, d. h. zur Ebene parallel läuft; hier ist die Aufgabe nach §. 103. überhaupt unmöglich.

§. 122. Ein Punkt, eine Gerade und eine Ebene sind gegeben; man soll durch den Punkt eine Ebene legen, die zur Geraden parallel ist und auf der Ebene senkrecht steht.

Man legt durch den Punkt eine erste Hülfsgerade parallel zur gegebenen Geraden und eine zweite senkrecht zur Ebene; diese beiden Geraden bestimmen dann die gesuchte Ebene nach §. 11. und §. 60.; fallen jedoch die beiden Hülfsgeraden zusammen, was nach §. 53. dann stattfindet, wenn die gegebene Gerade zur Ebene senkrecht steht, dann gibt es unzählig viele Ebenen, die durch den Punkt gehen, auf der Ebene senkrecht stehen und zur Geraden parallel sind.

§. 123. Ein Punkt, eine Gerade und eine Ebene sind gegeben, durch den Punkt eine Gerade zu legen, die zur Geraden senkrecht ist und zur Ebene parallel.

Man legt durch den gegebenen Punkt eine Ebene senkrecht auf die Gerade. Ist diese Hülfsebene parallel zur gegebenen Ebene, wie nach §. 58., wenn die gegebene Gerade zur zweiten Ebene senkrecht ist, so ist jede in der Hülfsebene durch den Punkt gehende Gerade eine verlangte.

Schneiden sich aber beide Ebenen, so zieht man in der Hülfsebene durch den Punkt eine zur Schnittlinie parallele Gerade und diese ist dann die verlangte.

§. 124. Ein Punkt und zwei Ebenen sind gegeben, eine Gerade zu finden, die durch den Punkt geht und zu beiden Ebenen parallel ist

a) die Ebenen sind parallel.

Dann ist jede Gerade, die zu einer parallel ist, auch zur andern parallel nach §. 104. Die Aufgabe ist also unbestimmt.

b) Die Ebenen schneiden sich.

Dann legt man durch den Punkt eine Gerade parallel zur Schnittlinie und dieß ist die verlangte nach §. 11. Hier ist die Aufgabe bestimmt.

Digitized by Google

§. 125. Ein Punkt und zwei Ebenen sind gegeben; man soll eine Ebene finden, die auf beiden senkrecht steht.

a) Die Ebenen sind parallel.

Dann ist jede Ebene, die auf der einen senkrecht steht, auch zur andern senkrecht nach §. 100.

b) Die Ebenen schneiden sich.

Dann legt man vom Punkt aus auf jede Ebene einen Perpendikel; diese bestimmen dann, da sie nicht zusammenfallen können, eine Ebene, welche nach §. 60. die verlangte ist.

§. 126. Drei Gerade sind gegeben; man soll eine vierte finden, die zwei schneidet und zur dritten parallel ist.

a) Sind alle drei Geraden in einer Ebene, dann gehört die Aufgabe zur Planimetrie und ist nach dieser zu lösen.

b) Liegen zwei Gerade in einer Ebene, zu welcher die dritte parallel läuft, so ist jede in der Ebene liegende Gerade, die zur dritten Gerade parallel ist, eine gesuchte. Die Aufgabe ist dann unbestimmt.

c) Liegen zwei Geraden in einer Ebene, welche von der dritten geschnitten wird, so legt man durch den Schnittpunkt eine Gerade, die zu einer in der Ebene liegenden parallel ist und die zweite schneidet. Hier ist die Aufgabe zweideutig, jedoch unmöglich, wenn die zwei in der Ebene liegenden Geraden unter sich parallel sind.

d) Kann man durch die Geraden zwei oder drei Ebenen legen, so ist die Aufgabe unmöglich.

e) Kreuzen sich die drei Geraden, so legt man durch die erste eine Ebene parallel zur dritten, sucht den Durchschnittspunkt der zweiten Geraden mit dieser Ebene und zieht durch diesen in der Hülfsebene eine Parallele zur dritten Geraden, welches die gesuchte ist. Hier ist die Aufgabe bestimmt.

§. 127. Zwei Geraden sind gegeben und eine Ebene, eine Gerade zu finden, die die drei gegebenen Stücke schneidet.

a) Die beiden Geraden liegen in einer Ebene. Ist diese zur gegebenen Ebene parallel, so ist die Aufgabe unmöglich. Schneidet sie die gegebene Ebene, so ist jede vierte Ge-

Digitized by Google

rade der Hülfsebene, welche die gegebenen Geraden und den Durchschnitt beider Ebenen schneidet, eine gesuchte.

b) Die beiden Geraden liegen nicht in einer Ebene.

Dann nimmt man in jeder Geraden und in der Ebene einen Punkt an und legt durch die drei Punkte eine Hülfsebene, zieht in dieser durch die zwei Geradenpunkte eine Gerade. Diese wird im Allgemeinen die Kante der beiden Ebenen schneiden und ist somit eine verlangte. Es gibt unzählig viele.

§. 128. Zwei Geraden und eine Ebene sind gegeben; man soll eine neue Gerade finden, welche die gegebenen Geraden schneidet und zur Ebene parallel ist.

a) Die beiden Geraden schneiden die Ebene.

Man macht zur gegebenen Ebene eine parallele Hülfsebene und sucht die Durchschnittspunkte dieser und der Geraden und verbindet sie, dann ist die Verbindungsgerade, die gesuchte. Es gibt solcher unzählig viele.

b) Die eine Gerade ist parallel zur Ebene.

Dann legt man durch diese eine Ebene parallel zur gegebenen, sucht den Durchschnittspunkt dieser und der Geraden, zieht durch diesen in der Hülfsebene eine beliebige Gerade, welche die gesuchte ist. Hier ist die Aufgabe auch vieldeutig; doch liegen alle entsprechenden Geraden in einer zur gegebenen Ebene parallelen.

c) Beide Gerade sind zur Ebene parallel. Liegen sie außerdem beide in einer zur gegebenen Ebene parallelen, so findet man leicht unzählig viele der Aufgabe entsprechende Geraden. Ist aber dieß nicht der Fall, so ist die Aufgabe unmöglich.

§. 129. Zwei Geraden und eine Ebene sind gegeben; man soll eine neue Gerade finden, die in der Ebene liegt, die erste Gerade schneidet, auf der zweiten senkrecht steht.

Man sucht den Durchschnitt der ersten Geraden und der Ebene und legt durch diesen Punkt eine Hülfsebene senkrecht auf die zweite Gerade, so ist der Schnitt der beiden Ebenen die gesuchte Gerade.

§. 130. Drei Ebenen sind gegeben; man soll einen Punkt suchen, der allen drei gemein ist. Man sucht die Schnittlinien

Digitized by Google

der zwei ersten Ebenen und dann den Schnittpunkt dieser Geraden und der dritten Ebene, welches der gesuchte Punkt ist.

Kapitel VI.

Vom körperlichen Eck, insbesondere vom körperlichen Dreieck oder Dreikant.

§. 131. Wenn drei oder mehrere Geraden sich von einem Punkt aus beliebig weit in den Raum erstrecken und zwischen je zwei auf einander folgenden die mögliche Ebene durchgelegt ist, so begränzen letztere einen nur nach einer Richtung hin noch offenen Raum, den man körperliches Eck heißt, in dem ein solches bei den eben begränzten Körpern immer dort vorkömmt, wo der Körper ein Eck bildet (entsprechend dem Eck der ebenen geradelinig begränzten Figuren). — Der Punkt, von welchem die Geraden und Ebenen aus nach einer Richtung jede fortgehen, heißt Scheitel oder Spitze des körperlichen Ecks. Die Geraden selbst heißen Kanten, und die Ebenen sind seine Ebenen. Wenn das körperliche Eck drei Kanten hat, so heißt man es körperliches Dreieck oder auch kürzer Dreikant; sind es n Kanten, körperliches n Eck oder n Kant. Wir beschäftigen uns hier insbesondere mit dem Dreikant.

§. 132. An einem körperlichen Dreieck oder Dreikant sind, wie bei einem ebenen Dreieck, sechs Bestimmungsgrößen von zweierlei Art zu unterscheiden. Die drei Ebenen machen an den Kanten drei Ebenenwinkel — die Ebenenwinkel oder Winkel des Dreikants; die drei Kanten bilden unter sich drei Winkel — die Kantenwinkel oder Seiten des Dreikants. —

§. 133. Wenn man eine Kante eines Dreikants verlängert, so gibt diese Verlängerung mit den zwei ursprünglichen Kanten ein neues Dreikant, das zu dem ursprünglichen in gewisser Beziehung steht. Die zwei Kantenwinkel an der verlängerten Kante im neuen sind supplementar zu den Kantenwinkeln derselben Kante im Alten; die Ebenenwinkel an den zwei unveränderten Kanten im neuen sind supplementar zu den Ebenenwinkeln an diesen Kanten im alten Dreikant. Dagegen ist der Ebe-

Digitized by Google

nenwinkel an der verlängerten Kante und der Kantenwinkel zwischen den unverlängerten Kanten in beiden Dreikanten derselbe.

In Fig. 13. wird OC nach OC′ verlängert. Nun ist offenbar $AOC' = \pi - AOC$, $BOC' = \pi - BOC$ als Nebenwinkel, sowie Ebenenwinkel bei AO im Dreikant OABC′ das Supplement des ebenen Winkels an AO im Dreikant OABC, indem beide Winkel auf einer Seite der Ebene COC′A und auf verschiedener Seite der dieselbe schneidenden anderen Ebene AOB liegen, ebenso sind die Ebenenwinkel an Kante OB in beiden Dreikanten supplementar zu einander. Kantenwinkel AOB ist beiden derselbe, sowie der Ebenenwinkel der Kante COC′

§. 134. Wenn man zwei Kanten eines Dreikants verlängert, so entsteht mit diesen und der unveränderten dritten Kante ein neues Dreikant, und die Kantenwinkel an der unveränderten Kante sind in beiden Dreikanten stückweise supplementar; ebenso sind es die Ebenenwinkel an den verlängerten Kanten im neuen Dreikant zu den entsprechenden im alten. Dagegen ist der Kantenwinkel zwischen den verlängerten Kanten im neuen dem entsprechenden im alten Dreikant gleich, sowie auch der Ebenenwinkel an der nicht verlängerten Kante in beiden der nämliche ist.

Der Beweis ist leicht, wie in vorhergehendem §., zu führen.

§. 135. Wenn man die drei Kanten eines Dreikants verlängert, so bilden die drei Verlängerungen ein neues Dreikant, das genau dieselben drei Kanten und Ebenenwinkel hat, wie das alte; denn ein jeder Kantenwinkel des einen ist der Scheitelwinkel zu einem zwischen denselben aber verlängerten Kantenwinkel des andern. Ebenso ist ein jeder Ebenenwinkel des einen der Scheitelwinkel zu einem an derselben Kante liegenden Ebenenwinkel des andern.

Anmerkung. Denkt man sich die beiden Dreikante auf einer Seite eine Ebene mit zwei entsprechenden Ebenen, z. B. BOC und B′O′C′ gestellt, so bemerkt man sogleich, daß die Dreikante, obwohl sie alle Bestimmungsstücke gleich haben, doch verschieden sind, indem die einzelnen derselben in beiden nach entgegengesetzter Ordnung auf einander folgen, so liegt z. B. von der Spitze aus Winkel AOB links und A′O′B′ rechts

Digitized by Google

den Kantenwinkel **BOC** und **B′O′C′**; dem folgt weiter rechts **AOC** und am andern weiter links **A′O′C′** ꝛc. Solche Dreikante können deßhalb auch nie zur Deckung gebracht werden, und heißen (deßhalb auch nicht congruent, sondern) symmetrisch.

Anmerkung 2. Das zu einem Dreikant symmetrische hat (wie das congruente) alle Bestimmungsstücke mit dem ursprünglichen gemein; das symmetrische hat jedoch die entgegengesetzte (das congruente die nämliche) Aufeinanderfolge derselben.

Aehnlich ist es bei den Körpern. (Linke Hand und rechte Hand sind, wenn sonst gleich gebildet, symmetrisch; deßhalb kann der linke Handschuh nicht über den rechten gezogen werden).

§. 136. Wenn man im Scheitel eines Dreikants auf die drei Ebenen Perpendikel errichtet, so bilden die Winkel der Perpendikel, welche alle entweder auf der äußern oder alle auf der innern der Ebene liegen, ein neues Dreikant, auf dessen Ebenen ebenso die Kanten des alten senkrecht stehen. Deßhalb ist ein Kantenwinkel des einen das Supplement desjenigen Ebenenwinkels des andern, auf dessen Schenkelebenen die Schenkel des erstern senkrecht stehen, aus welchem Grunde man die beiden Dreikante supplementar zu einander nennt.

Ist **OA′** senkrecht auf **OB** und **OC**
OB′ „ „ **OA** und **OC**,
OC′ „ „ **OA** und **OB**

so ist offenbar auch

OA senkrecht auf **OB′** und **OC′**
OB senkrecht auf **O′A** und **OC′**
OC senkrecht auf **OA′** und **OB′**.

Das heißt, sowie **OA′** senkrecht auf der Ebene des Kantenwinkels **BOC** ist, so ist auch **OA** senkrecht auf der Ebene des Kantenwinkels **B′O′C** u. s. f.

Daraus folgt mit Hülfe des §. 184., daß Kantenwinkel **A′OB′** supplementar zum Ebenenwinkel der Kante **OC**, und Kantenwinkel **AOB** supplementar zum Ebenenwinkel an **OC′** und ganz ebenso verhält es sich bei den übrigen Winkeln.

Digitized by Google

Bezeichnet man deßhalb die Ebenenwinkel an OA und OA′ mit α und α', ferner die an OB und OB′ mit β und β', und die an OC und OC′ mit γ und γ'. Alsdann die Kantenwinkel BOC mit a (weil dem Ebenenwinkel α gegenüber liegend), ebenso B′OC′ mit a′, sowie noch AOC mit b, A′OC′ mit b′, AOB mit c und A′OB′ mit c′, so ist

$$\begin{aligned} \alpha + a' &= \pi \qquad \alpha' + a = \pi \\ \beta + b' &= \pi \quad \text{und} \quad \beta' + b = \pi \\ \gamma + c' &= \pi \qquad \gamma' + c = \pi. \end{aligned}$$

§. 137. In einem Dreikant sind zwei Kantenwinkel zusammengenommen größer als der dritte.

Es sei Fig. 14. AOB der größte von den drei Kantenwinkeln, so soll sein $AOC + BOC > AOB$. Man ziehe in der Ebene des Winkels AOB eine Gerade OC′, welche von Winkel AOB ein Stück AOC′ abschneidet, so groß als AOC. Alsdann ziehe man die Gerade AC′B, mache $AC = AC'$ und ziehe noch AC und BC, so ist im Dreieck ABC

$AC + BC > AB$, oder $AC + BC > AC' + BC'$;

ferner ist Dreieck AOC congruent mit Dreieck AOC′ weil $OA = OA'$, $OC = OC'$ und $AOC = AOC'$; hieraus folgt $AC = AC'$. Dieß in obige Ungleichung gesetzt gibt $BC > BC'$.

Ferner ist dann in den Dreiecken BOC und BOC′: $OB = OB'$, $OC = OC'$, aber $BC > BC'$, somit auch Winkel BOC größer als Winkel BOC′; hieraus folgt nun:

$$AOC + BOC > AOC' + BOC'$$
$$AOC + BOC > AOB, \text{ w. z. b. w.}$$

Dieser Satz ist dem Satz des ebenen Dreiecks analog, der heißt:

Zwei Seiten sind zusammen größer als die dritte.

§. 138. Die Summe der drei Kantenwinkel ist nicht unbeschränkt (was z. B. die Summe der drei Seiten eines ebenen Dreiecks ist), sondern sie ist kleiner als vier Rechte.

Es soll sein $AOB + AOC + BOC < 2\pi$.

In voriger Figur sind bei A, B und C, als Scheitel genommen, drei Dreikante, und es ist nach vorigem Satze

Digitized by Google

$$OAB + OAC > BAC$$
$$OBA + OBC > ABC$$
$$OCA + OCB > ACB, \text{ oder durch Addition}$$
$$(OAB + OBA) + (OAC + OCA) + (OBC + OCB) > BAC + ABC + ACB.$$

Nun ist aber $BAC + ABC + ACB = \pi$,
$OAB + OBA = \pi - AOB$ ꝛc.

Dieß eingesetzt gibt:

$$\pi - AOB + \pi - AOC + \pi - BOC > \pi \text{ oder}$$
$$AOB + AOC + BOC < 2\pi, \text{ w. z. b. w.}$$

§. 139. Die Summe der drei Ebenenwinkel eines Dreikants ist nicht (wie beim ebenen Dreieck) eine bestimmte, wohl aber eine beschränkte Zahl und liegt zwischen zwei und sechs Rechten.

Heißt man nämlich die Ebenenwinkel eines Dreikants α, β und γ und die Kantenwinkel des ihm supplementaren a', b' und c', so ist nach vorhergehendem Satze

$a' + b' + c' < 2\pi$, offenbar ist auch $a' + b' + c' > o$
oder nach §. 136. $a' = \pi - \alpha$, $b' = \pi - \beta$ und $c' = \pi - \gamma$, und also

$$\pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma \begin{matrix} < 2\pi \\ > o \end{matrix} \text{ hieraus folgt}$$

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi \text{ und}$$
$$\alpha + \beta + \gamma < 3\pi, \text{ w. z. b. w.}$$

§. 140. Wenn in einem Dreikant zwei Kantenwinkel einander gleich sind, so sind auch die ihnen gegenüberstehenden Ebenenwinkel gleich. Wenn einer der Kantenwinkel größer wird, so wird der gegenüberstehende Ebenenwinkel auch größer.

Wenn zwei Kantenwinkel zusammen gleich zwei Rechte sind, so ist die Summe der ihnen gegenüberstehenden Ebenenwinkel ebenfalls zweien Rechten gleich.

Ist die Summe der Kantenwinkel aber kleiner oder größer als zwei Rechte, so ist auch die Summe der gegenüberstehenden Ebenenwinkel kleiner oder größer als zwei Rechte.

Digitized by Google

Sobald in Fig. 4. die Kantenwinkel **AOB** und **AOC** einander gleich ſind, ſo muß nach §. 81. auch **BOD** = **COD** ſein, dann ſind aber auch die Ebenenwinkel an **OB** und **OC** nach §. 80. einander gleich. Iſt ferner **AOE** größer als **AOB**, alſo auch größer als **AOC**, ſo muß auch **EOD** > **BOD**, alſo auch > **COD** ſein. Dann iſt aber auch Ebenenwinkel bei **OB** oder **OC** größer als bei **OE**.

Wenn die zwei Kantenwinkel zuſammen zwei Rechte ausmachen, wie **AOB** und **AOC′** in Fig. 4., ſo iſt, wenn **OC**, rückwärts noch verlängert wird, nothwendig **AOC** = **AOB**, ſomit im Dreikant **OACB**, Ebenenwinkel bei **OC** = Ebenenwinkel bei **OB**, alſo iſt Ebenenwinkel bei **OB** im Dreikant **OAC′B**, das Supplement von Ebenenwinkel bei **OC′**, d. h. wenn die Kantenwinkel zuſammen zwei Rechte ausmachen, ſo betragen ihre gegenüberliegenden Ebenenwinkel gleichfalls zwei Rechte. Beträgen zwei Kantenwinkel weniger als zwei Rechte, ſo ſind ſie entweder beide ſpitz, dann ſind aber auch die beiden gegenüberliegenden Ebenenwinkel ſpitz, wie leicht aus §. 79. erſichtlich iſt; oder es iſt einer ſtumpf wie im Dreikant **OABC′**, verlängert man dann die Kante **OC′**, an welcher der ſtumpfe Kantenwinkel liegt nach **OC**, ſo muß **AOC** > **AOB**, weil

$$\mathbf{AOC'} + \mathbf{AOC} = \pi \text{ aber}$$
$$\mathbf{AOC'} + \mathbf{AOB} < \pi \text{ iſt,}$$

ſomit iſt der Ebenenwinkel bei Kante **OC** kleiner als der bei Kante **OB** im Dreikant **OABC**, daraus folgt, daß Ebenenwinkel bei **OC** und der Ebenenwinkel bei **OB** in Dreikant **OABC′** zuſammen kleiner als zwei Rechte ſind, d. h. iſt die Summe zweier Kantenwinkel kleiner als zwei Rechte, ſo iſt es auch die Summe der ihnen gegenüberliegenden Ebenenwinkel.

Iſt endlich die Summe zweier Kantenwinkel größer als zwei Rechte, ſo müſſen entweder beide ſtumpf ſein, dann ſind dieß aber auch die gegenüberſtehenden Ebenenwinkel, und ſie betragen alſo zuſammen jedenfalls mehr als zwei Rechte, oder es iſt blos einer ſtumpf, dann iſt es aber auf ganz entſprechende Weiſe wie im vorigen Abſatz zu beweiſen, daß in dieſem Falle dann die Summe der den Kantenwinkeln gegenüberſtehenden Ebenenwinkel ebenfalls größer als zwei Rechte iſt.

Digitized by Google

Anmerkung 1. Die Figur ist auch zum Beweise des ersten Theils unseres Satzes tauglich, wenn die Kantenwinkel, von denen die Rede ist, statt spitz stumpf sind, dann gelten statt der Buchstaben B, C und E die Buchstaben B′, C′ und E′.

Anmerkung 2. Der erste Theil des Satzes ist ganz entsprechend dem Satze über das gleichschenklige Dreieck in der Ebene. Der zweite Theil hat aber in der Planimetrie kein Analogon. Man nennt ein Dreikant, in welchem zwei Kantenwinkel gleich sind, ein gleichschenkliges.

Anmerkung 3. Aus unserm Satze folgt auch: Sind die drei Kantenwinkel einander gleich, so sind es auch die Ebenenwinkel. Ein solches Dreikant heißt gleichseitig.

Anmerkung 4. Endlich kann aus dem ausgesprochenen Satze sehr leicht (auf indirekte Weise) der umgekehrte gefunden werden, welcher ganz diesem gleichlautend ist, nur muß man die Worte Kantenwinkel und Ebenenwinkel überall mit einander vertauschen.

§. 141. Zwei Dreikante heißen congruent, wenn sie in allen Theilen so mit einander übereinstimmen, daß sie sich, gehörig auf einander gelegt, vollkommen decken. Es gehört dazu offenbar Gleichheit der sechs entsprechenden Bestimmungsstücke und ferner nach §. 135. die nämliche Aufeinanderfolge derselben.

§. 142. Zwei Dreikante heißen congruent, wenn sie die drei Kantenwinkel stückweise gleich und in derselben Aufeinanderfolge haben. Die beiden Dreikante OABC und O′A′B′C′ in Fig. 15. haben die drei Kantenwinkel $AOB = A'O'B'$, $AOC = A'O'C'$ und $BOC = B'O'C'$ und in derselben Aufeinanderfolge sie sollen congruent sein.

Man kann jedenfalls die Dreikante so aufeinander gelegt denken, daß sich die Kantenwinkel AOB und A′O′B′ decken. Sind ferner COD und C′O′D′ die durch OC und O′C′ auf der Ebene AOB und A′O′B′ senkrechten Ebenen, so muß, weil $A'O'C' = AOC$, auch Winkel $A'O'D' = AOD$, dann aber muß O′D′ entweder auf OD oder auf OD″, wo $AOD'' = AOD$ ist. Wegen Gleichheit der Winkel B′O′C′ und BOC muß aber auch $B'O'D' = BOD$ sein, also O′D′ entweder auf OD oder auf OD‴ fallen, wobei $BOD''' = BOD$ ist; hier-

Digitized by Google

aus folgt nothwendig, daß $O'D'$ nur auf OD fallen kann, nun müssen aber auch die Ebenen $C'O'D'$ und COD zusammenfallen und wegen der gleichen Aufeinanderfolge der einzelnen Kantenwinkel können $O'C'$ und OC, die in dieser Ebene liegen, nicht auf verschiedenen Seiten der Ebene AOB fallen, woraus mit Beziehung auf §. 81. die Deckung von $O'C'$ und OC ersichtlich ist, somit die drei Kanten sich decken und demgemäß die beiden Dreikante congruent sind.

§. 143. Es sind drei Winkel gegeben; man soll ein Dreikant konstruiren, das sie als Kantenwinkel hat. Daß die drei Winkel zusammen kleiner als vier Rechte, und einer kleiner als die zwei übrigen sein müssen, wenn die Aufgabe möglich sein soll, folgt aus §. 137. und §. 138., und daß es in diesem Falle nur ein Dreikant gibt, folgt aus dem vorhergehenden §.

Um das Dreikant nun selbst zu konstruiren, macht man auf OC (Fig. 16a.), welches eine Kante desselben vorstellen soll, in C eine Hülfsebene senkrecht, mit der Länge OC als Kathete $O'C'$ Fig. 16b. und den zwei kleineren gegebenen Kantenwinkeln als an $O'C'$ anliegende Winkel macht man die rechtwinkligen Hülfsdreiecke $A'O'C'$ und $B'O'C'$. Mit $O'A'$ und $O'B'$ als Seiten und dem dritten (dem größten) Winkel, als zwischenliegenden Winkel construirt man das Dreieck $A'O'B'$ und erhält die drei Stücke $A'B'$, $A'C'$ $B'C'$, hiemit construirt man dann Fig. 16a in der auf OC senkrechten Hülfsebene das Dreieck ABC, indem man C Eckpunkt sein läßt und zieht von O an A und B die Linien OA und OB, so ist dann das Dreikant $OABC$ das gesuchte, denn Dreieck $A'O'C' \cong AOC$, $B'O'C' \cong BOC$, weil $OC = O'C'$, $AC = A'C'$ und $BC = B'C'$ ist, folglich Winkel $AOC = A'O'C'$ und Winkel $BOC = B'O'C'$, ebenso Dreieck $A'O'B' \cong AOB$, folglich auch Winkel $A'O'B' = AOB$, also hat das gefundene Dreikant die drei gegebenen Winkel als Kantenwinkel. Das Dreieck ABC ist übrigens nur dann möglich, wenn $A'B'$ nicht größer als $A'C + B'C'$ ist, da aber $A'O'C' + B'O'C > A'O'B'$ nach §. 138. ist, so ist auch $AC + BC > AB$.

Ferner ist diese Construction nur möglich, wenn zwei der gegebenen Winkel spitz sind. Sind nun keine zwei spitze unter

Digitized by Google

den gegebenen, sondern zwei stumpfe oder gar drei stumpfe Winkel gegeben, so nimmt man von zweien die spitzen Supplemente und macht mit diesen $A'O'C'$ und $B'O'C$ hierauf sonst das Dreieck ABC, alsdann zieht man OA und OB, verlängert OC rückwärts nach C' und dann ist $OABC'$ das verlangte Dreikant, wie mit Hülfe des §. 133. ersichtlich ist. Ist einer ein rechter und die übrigen beide spitz oder beide stumpf, so nimmt man die rechten Winkel zuletzt und construirt das Uebrige, wie bereits gezeigt. Ist aber ein Winkel recht und einer stumpf, so nimmt man von dem stumpfen Winkel das Supplement und hiermit und dem spitzen Winkel macht man $A'O'C'$ und $B'O'C'$, den rechten nimmt man als letzten Winkel, dann construirt man das Dreieck ABC und zieht dann OA, OB und OC, verlängert aber die dem rechten und dem stumpfen gemeinschaftliche Kante rückwärts; ist z. B. $A'O'C'$ der Supplementswinkel gewesen, so verlängert man AO nach OA' und dann ist $OA'BC$ das verlangte Dreikant. Sind zwei der Winkel rechte, so macht man ACB dem dritten Winkel gleich und zieht mit AC und AB durch O die Parallelen OA' und OB', dann ist $OCA'B'$ das verlangte Dreikant.

§. 144. Zwei Dreikante sind congruent, wenn sie zwei Kantenwinkel und den von diesen eingeschlossenen Ebenenwinkel, stückweise gleich und in derselben Aufeinanderfolge haben.

Die beiden Dreikante $OABC$ und $O'A'B'C'$ haben die Kantenwinkel $AOC = A'O'C'$ und $BOC = B'O'C'$, sowie die Ebenenwinkel bei OC und $O'C'$ gleich und in derselben Aufeinanderfolge und sollen congruent sein. Man legt die beiden Dreikante mit den Kanten OC und $O'C'$ so auf einander, daß Winkel $B'O'C'$ auf BOC fällt, dann muß aber auch Ebene $A'O'C'$ der Richtung nach auf AOC fallen, wegen Gleichheit der Ebenenwinkel bei OC und $O'C'$, weil ferner Kantenwinkel $A'O'C' = AOC$, und die Aufeinanderfolge der Stücke in beiden Dreikanten die nämliche ist, muß auch $O'A'$ auf OA fallen. Es decken sich also die Dreikante und sind somit congruent.

§. 145. Es sind drei Winkel gegeben mit zwei als Kantenwinkel und dem dritten als dem von diesen eingeschlossenen Ebenenwinkel ein Dreikant zu construiren.

Digitized by Google

OC in Fig. 16a sei die Kante, an welcher der Ebenenwinkel liegen soll; man legt wie in §. 143. eine Ebene senkrecht auf OC, macht ferner wie dort mit OC und den gegebenen Kantenwinkel die Hülfsdreiecke in Fig. 16b. $A'O'C'$ und $B'O'C'$; hierauf beschreibt man in der senkrechten Ebene, C als Scheitel nehmend, einen Winkel dem gegebenen Ebenenwinkel gleich und trägt auf den Schenkeln die Länge $AC = A'C'$ und $BC = B'C'$ auf, zieht noch OA und OB, so ist OABC das verlangte Dreikant, wie überaus leicht einzusehen ist. Sind die beiden Kantenwinkel stumpf, so nimmt man ihre spitzen Supplemente, verfährt damit, wie eben gesagt, verlängert schließlich aber OC rückwärts gegen C', dann ist $OABC'$ das verlangte Dreikant. Ist einer der Kantenwinkel stumpf, z. B. AOC, so nimmt man von ihm das spitze Supplement, sowie auch von dem als Ebenenwinkel gegebenen und construirt nun das Dreikant wie oben, verlängert aber schließlich die Kante OA nach A', dann ist $OA'BC$ das verlangte Dreikant. Ist einer der Kantenwinkel ein rechter, z. B. AOC, so macht man in der Hülfsebene den Winkel ACB dem gegebenen Ebenenwinkel gleich, ferner $BC = B'C'$, zieht OB und durch O eine Gerade OA' parallel zu CA, dann ist $OA'BC$ das Dreikant.

§. 146. Zwei Dreikante sind nicht nothwendig congruent, wenn sie zwei Kantenwinkel und einen Ebenenwinkel, der einem der ersten gegenüberliegt, stückweise gleich und in derselben Aufeinanderfolge haben; sie sind es nur dann, wann in beiden die dem andern Kantenwinkel gegenüberstehenden Ebenenwinkel gleichzeitig spitz, recht oder stumpf sind.

Zwei Dreikante OABC Fig. 17. oder Fig. 18. und $O'A'B'C'$ (von letzterem denke man sich die Zeichnung) haben die Kantenwinkel $AOC = A'O'C' = b$, $BOC = B'O'C' = a$ und den Ebenenwinkel bei OA dem bei $O'A' = \alpha$ gleich und in derselben Aufeinanderfolge, sie sollen congruent sein, wenn die Ebenenwinkel bei OB und $O'B'$, d. h. die Winkel β und β' gleichzeitig spitz, recht oder stumpf sind.

Man denke sich die Dreikante so auf einander gelegt, daß die Kanten OA und $O'A'$, an welchen die beiden Ebenenwinkel, sowie die daran liegenden Kantenwinkel AOC und $A'O'C'$

sich decken und die Ebenen AOB und A′O′B′ der Richtung nach auf einander fallen. Dann decken sich auch die durch OC und O′C′ auf die Ebenen AOB und A′O′B′ senkrecht gelegten Hülfsebenen COD und C′O′D′, sowie die Schnittlinien OD und O′D′ und ferner muß O′B′ entweder auf OB oder auf OB″ fallen, wobei $BOD = B''OD$ ist nach §. 80. Da aber die Ebenenwinkel an OB und OB″ in den Dreikanten OABC und OAB″C zu einander supplementar sind, wie leicht aus §. 79. hervorgeht, so kann dann kein Zweifel mehr bestehen, ob O′B′ auf OB fällt oder nicht, wenn man weiß, daß die beiden Ebenenwinkel bei OB und O′B′ gleichzeitig spitz, recht oder stumpf sind.

Entweder ist letzteres nun anders woher bekannt oder nicht, indessen läßt es sich in gewissen Fällen schon aus der Beschaffenheit der gegebenen Winkel a, b und α erkennen, wie nachstehende Betrachtung zeigt:

I. Es sind beide Kantenwinkel a und b spitz, oder einer ein rechter, der andere spitz, somit $a + b < \pi$, also auch nach §. 140. $\alpha + \beta < \pi$. Dabei kann sein

1) $a \gtreqless b$.

Dann ist nach §. 140. auch $\alpha \gtreqless \beta$, folglich kann β nur spitz sein; also tritt hier Congruenz ein;

2) $a < b$.

Dann ist nach §. 140. $\alpha < \beta$ und es kann hier somit β spitz, recht oder stumpf sein. Jedoch läßt sich hier noch Näheres aus der Beschaffenheit des außer a und b gegebenen Winkels α erkennen. Nämlich

a) Es sei $\alpha \geqq \frac{\pi}{2}$, dann müßte $\beta > \frac{\pi}{2}$, folglich $\alpha + \beta > \pi$ sein, was gegen die Annahme, es gibt also kein Dreikant in diesem Fall.

b) Es sei $\alpha < \frac{\pi}{2}$, nun kann $\beta \gtreqless \frac{\pi}{2}$ und es läßt sich nichts Weiteres entscheiden. Aus §. 79. ist jedoch zu

Digitized by Google

schließen, daß hier noch Congruenz stattfinden kann, wenn $a = \varphi$ ist, wo φ den Winkel der Kante **OB** mit Ebene **AOC** bedeutet, und daß kein Dreikant existirt, wenn $a < \varphi$ ist.

II. Es sind beide Kantenwinkel oder wenigstens einer stumpf.

1) $b > \frac{\pi}{2}$.

Denkt man sich hier die Kante **OA** (Fig. 17. u. 18.), an welcher der gegebene Ebenenwinkel α liegt, rückwärts verlängert nach A_1, so erhält man ein neues Dreikant OA_1BC, dessen Winkel sind

$$a_1 = a$$
$$b_1 = \pi - b$$
$$\alpha_1 = \alpha,$$

also b_1 spitz, ebenso ist es bei dem andern von den zwei gegebenen Dreikanten:

$$a_1' = a'$$
$$b_1' = \pi - b'$$
$$\alpha_1' = \alpha'.$$

Die zwei neu gewonnenen Dreikanten haben somit zwei spitze Kantenwinkel und einen gegenüberliegenden Ebenenwinkel, und es ist über die etwa stattfindende Congruenz nach **I.** zu entscheiden, und wie es bei ihnen ist, so ist es nothwendig auch bei den gegebenen, somit hat man:

a) Ist $a \gtreqless \pi - b$, so sind die Dreikante congruent,

b) $a < \pi - b$ und

α) $\alpha \gtreqless \frac{\pi}{2}$, so existirt gar kein Dreikant,

β) $\alpha < \frac{\pi}{2}$, dann gibt es kein Dreikant, wenn $a < \varphi$, die Dreikante sind congruent, wenn $a = \varphi$, und sind nicht nothwendig congruent, wenn $a > \varphi$ ist.

Digitized by Google

2) $a > \frac{\pi}{2}$.

Denkt man sich die Kante (**OB** in den Figuren 17. und 18.), an welchen der Ebenenwinkel β liegt, rückwärts nach B_1 verlängert, so erhält man mit diesem verlängerten Stück und den zwei nicht verlängerten Kanten ein neues Dreikant, welches nach §. 133. folgende Winkel hat:

$a_1 = \pi - a$, weil a stumpf, so ist a_1 spitz.
$b_1 = b$
$\alpha_1 = \pi - \alpha$.

Ebenso ist es bei dem andern Dreikant

$a_1' = \pi - a'$
$b_1' = b'$
$\alpha_1' = \pi - \alpha'$.

Weil nun $a = a'$ $b = b'$ und $\alpha = \alpha'$, so ist auch $a_1 = a_1'$ $b_1 = b_1'$ und $\alpha_1 = \alpha_1'$ und die zwei neugewonnenen Dreikante haben somit zwei spitze Kantenwinkel und einen gegenüberliegenden Ebenenwinkel gleich und man hat somit nach **I.** die verschieden eintretenden Fälle zu betrachten, um über die Congruenz der gebildeten Hülfsdreikante zu entscheiden; sind aber diese congruent, so sind es nothwendig auch die gegebenen:

a) Ist $\pi - a \gtreqless b$, so sind die Dreikante congruent,

b) Ist $\pi - a < b$ und

α) $\pi - \alpha \gtreqless \frac{\pi}{2}$, so gibt es kein Dreikant,

β) $\pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$, dann gibt es kein Dreikant, sobald $\pi - a < \varphi$; die Dreikante sind congruent, wenn $\pi - a = \varphi$ und sie sind nicht nothwendig congruent, wenn $\pi - a > \varphi$.

3) Ist $a > \frac{\pi}{2}$ und $b > \frac{\pi}{2}$, so denke man sich Kante **OC**

Digitized by Google

an welcher die beiden Kantenwinkel liegen, rückwärts nach OC_1 verlängert, so erhält man, wie aus §. 133. hervorgeht, ein neues Dreikant $OABC_1$, dessen Winkel sind

$a_1 = \pi - a$, also a_1 und b_1 spitz.
$b_1 = \pi - b$
$\alpha_1 = \pi - \alpha$.

Ebenso ist es beim andern der gegebenen Dreikante

$a_1' = \pi - a'$
$b_1' = \pi - b'$
$\alpha_1' = \pi - \alpha'$.

Weil nun $a = a'$, $b = b'$ und $\alpha = \alpha'$ ist, so ist auch $a_1 = a_1'$, $b_1 = b_1'$ und $\alpha_1 = \alpha_1'$, somit haben die neugewonnenen Dreikante zwei spitze Kantenwinkel und einen gegenüberstehenden Ebenenwinkel und es lassen sich die nun vorkommenden Fälle nach I. leicht beurtheilen; was aber bei ihnen gilt, hat auch für die gegebenen Dreikante Gültigkeit und man hat deßhalb:

a) $\pi - a \gtreqless \pi - b$, so sind die Dreikante congruent,

b) $\pi - b < \pi - b$ und

α) $\pi - \alpha \gtreqless \frac{\pi}{2}$, so existirt kein Dreikant,

β) $\pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$, dann gibt es kein Dreikant,

wenn $\pi - a < \varphi$; die Dreikante sind congruent,
wenn $\pi - a = \varphi$, und sie sind nicht nothwendig congruent, wenn $\pi - a > \varphi$ ist.

Alle diese Fälle lassen sich in folgendem Satz zusammenfassen:

Ist der spitze Winkel der beiden Kanten, an welchen der gegebene Ebenenwinkel nicht liegt, größer als der andere gegebene spitze Winkel der Kanten oder gleich ihm, so sind die Dreikante congruent.

Ist der erste Winkel aber kleiner, als der zweite, so existirt kein Dreikant, wenn der gegebene Ebenenwinkel mit seinem

Digitized by Google

im Dreikant gegenüberliegenden Kantenwinkel nicht gleichzeitig spitz oder stumpf ist. Sind beide genannte Winkel dagegen gleichzeitig spitz oder stumpf, so entscheidet das Weitere allein noch und zwar nach §. 79. der Umstand, ob der Winkel, den die Kante **OC**, welche den beiden gegebenen Kantenwinkeln **AOC** und **BOC** gemeinsam ist, mit der dieser Kante gegenüberstehenden Ebene **AOB** macht, größer, gleich oder kleiner als der erste Kantenwinkel **BOC**.

§. 147. Es sind drei Winkel gegeben; man soll ein Dreikant construiren; das zwei derselben als Kantenwinkel und den dritten als einen Ebenenwinkel hat, der einem der Kantenwinkel gegenüberliegt.

Man legt durch eine Gerade **OA** einer Ebene **OAB** Fig. 17. und 18. eine zweite Ebene, zur ersten unter dem als Ebenenwinkel gegebenen Winkel α geneigt, und zieht in der einen eine Gerade **OC** so, daß sie mit der Schnittlinie den Winkel **AOC** = dem Kantenwinkel b, der an dem Ebenenwinkel liegen soll, macht. Hierauf zieht man nach §. 85. in der andern Ebene eine Gerade **OB**, welche mit **OC** den dritten noch gegebenen Winkel macht. Die zwei ersten Operationen sind immer möglich, die letzte aber wird oft zu zwei Lösungen führen, wie in Fig. 17., oft zu einer, wie in Fig. 18., oft aber auch unmöglich sein, ganz den im vorigen §. gefundenen Resultaten gemäß.

§. 148. Eine andere nicht uninteressante Auflösung der im vorigen §. gegebenen Auflösung, die sich mehr an die in §. 143. und §. 145. gegebene anschließt, ist folgende:

Man nimmt Fig. 19a. **OC** als Kante des zu findenden Dreikants an, legt in **C** auf **OC** eine Hülfsebene senkrecht. Hierauf construirt man Fig. 19b., wie in §. 143. die rechtwinkligen Dreiecke $A'O'C'$ und $B'O'C'$. Alsdann fällt man von C' auf $O'A'$ den Perpendikel $C'D'$ und construirt mit $C'D'$ als Kathete und dem gegebenen Ebenenwinkel $C'D'E'$ als anliegenden Winkel, das rechtwinklige Dreieck $C'D'E'$ erhält so als zweite Kathete $C'E'$, welche man auf $O'C'$ aufträgt, wodurch man $C'E''$ erhält, nun ziehe man noch $A'E''$; wird ferner von **C** mit dem Radius $B'C'$ ein Kreisbogen gezogen, so ergeben sich die Schnittpunkte B_1' und B_2' auf der Gera-

Digitized by Google

den $A'E''$, die man endlich noch mit C' durch $B_1'C'$ und $B_2'C'$ verbindet. Alsdann zeichnet man in der Hülfsebene Fig. 19a. C als Eck genommen die Dreiecke CAB_1 und CAB_2 congruent und gleich liegend den gefundenen Dreiecken $C'A'B_1'$ und $C'A'B_2'$. Sodann verbindet man O mit A, B_1 und B_2 und erhält schließlich die Dreikante OAB_1C und OAB_2C als gesuchte.

Um dieß einzusehen, ziehe man Fig. 19a. in Ebene ACO die Gerade CD senkrecht auf OA und CE auf AC in Ebene ACB_1, verbinde E mit D, so ist nach §. 50. ED auch auf OA senkrecht, somit ist CDE der Linienwinkel des Ebenenwinkels an der Kante OA, nun ist aber Dreieck CDE congruent dem Hülfsdreieck $C'D'E'$ in Fig. 19b., somit Winkel $CDE = C'D'E'$, letzterer ist aber der als Ebenenwinkel gegebene, folglich auch ersterer. Diese Construction wird immer möglich sein, wenn sämmtliche Winkel spitz sind, und der Kreis wird mit AE immer zwei Punkte gemein haben, sobald $BC \gtreqless CF$ ist, wo CF die Entfernung des Punktes F von AE bedeutet. Wenn $BC \gtreqless AB$ ist, so gibt es nur einen Punkt auf der Seite der Ebene AOC, wo der spitze Ebenenwinkel von OAC und OAB liegt, der andere liegt auf der Seite des stumpfen Ebenenwinkels.

Ist der gegebene Ebenenwinkel stumpf, so wird die Construction gerade so mit Hülfe des spitzen Nebenwinkels gemacht; alsdann gilt aber nur das Dreikant, das auf der von E entgegengesetzten Seite der Ebene AOC liegt.

Ist der gegebene Ebenenwinkel ein rechter, so steht Ebene AOB wie die Hülfsebene auf AOC senkrecht, somit ist auch AE auf AC senkrecht. Man macht demnach in A die Gerade AE senkrecht auf AC und zieht von C aus mit BC den Kreis und zum Schnittpunkt B dieses und der Geraden AE zieht man OB, so ist $OABC$ das verlangte Dreikant.

Sind die Kantenwinkel stumpf, so macht man die Construction mit dem spitzen Supplementswinkel nach den in II. §. 146. angezeigten Methoden.

Digitized by Google

Ist der dem Ebenenwinkel gegenüberliegende Kantenwinkel ein rechter, so sucht man AC und AE wie sonst, zieht dann durch O mit AE eine Parallele OB, so bildet OABC das verlangte Dreikant, wie leicht nachweisbar.

Ist zuletzt der Kantenwinkel ein rechter, an welchem der gegebene Ebenenwinkel liegt, so nimmt man AC beliebig in der auf OC senkrechten Hülfsebene Fig. 20a. an, macht alsdann mit OC als Kathete und dem gegebenen Ebenenwinkel als anliegenden Winkel das Hülfsdreieck O′C′D′ Fig. 20b., zieht CD in der Fig. 20a. senkrecht auf AC und durch D mit AC eine Parallele DE. Alsdann sucht man BC wie gewöhnlich mit Hülfe von OC und dem Kantenwinkel BOC und beschreibt mit BC von C aus einen Kreis, welcher DE in B_1 und B_2 schneidet. Zuletzt noch durch O die mit AC Parallele OA_1 gezogen und O mit B_1 und B_2 verbunden, so sind OA_1B_1C oder OA_1B_2C Dreikante, die der Aufgabe genügen.

Es ist unschwer, diese Auflösung als allgemein gültig zu erkennen, so also, daß sich in ihr die oben ausgesprochene Regel in jeder Beziehung bewahrheitet, was wir jedoch dem Löser selbst überlassen zu können glauben, wobei wir nur Folgendes zum bessern Verständniß bemerken.

Ist $BC \gtreqless AC$, so erhält man ein Dreikant; ist $BC < AC$, so erhält man kein Dreikant, wenn Winkel $CDE \gtreqless \frac{\pi}{2}$, ist aber $BC < AC$ und $CDE < \frac{\pi}{2}$, so gibt es zwei Dreikante, wenn $BC > CF$, ein Dreikant, wenn $BC = CF$ und kein Dreikant, wenn $BC < CF$. Nun ist aber leicht einzusehen, daß die Bedingung $BC \gtreqless AC$ nichts anders heißt als $a \gtreqless b$, sobald beide Kantenwinkel spitz sind, oder $\pi - a \gtreqless b$, oder $a \gtreqless (\pi - b)$, oder $\pi - a \gtreqless \pi - b$, sobald ei-

ner oder beide stumpf sind. Ebenso heißt $BC \gtreqless CF$ a oder $(\pi - a) \gtreqless \pi$. Endlich ist $CDE = \frac{\pi}{2}$, wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $CDE < \frac{\pi}{2}$, wenn α und a gleichzeitig spitz oder stumpf sind, $CDE > \frac{\pi}{2}$, wenn einer dieser Winkel spitz der andere stumpf ist. —

§. 149. Zwei Dreikante sind congruent, wenn ihre Supplementardreikante congruent sind.

Denn da die Bestimmungsstücke der Supplementardreikante Supplementswinkel sind von denen der ursprünglichen, so müssen die Winkel der ursprünglichen Dreikante einander gleich sein, wenn es die der Supplementardreikante sind; dieß ist aber der Fall, weil letztere als congruent vorausgesetzt werden, somit haben die ursprünglichen Dreikante alle Winkel gleich und sind deßhalb congruent.

§. 150. Zwei Dreikante sind congruent

a) wenn sie die drei Ebenenwinkel,

b) wenn sie zwei Ebenenwinkel und den zwischenliegenden Kantenwinkel

c) wenn sie zwei Ebenenwinkel und einen Kantenwinkel, der einem der gegebenen Ebenenwinkel gegenüberliegt,

stückweise gleich und in derselben Aufeinanderfolge haben.

Denn im Falle a) sind die Supplementardreikante nach §. 142., im Falle b) nach §. 144., im Falle c) nach §. 146. congruent, folglich sind es auch die gegebenen Dreikante, bei c) sind jedoch die gegebenen Dreikante nur dann congruent, wenn der dem zweiten Ebenenwinkel gegenüberliegende Kantenwinkel in beiden gleichzeitig spitz, recht oder stumpf ist.

§. 151. Ein Dreikant zu construiren,

a) wenn drei Winkel als Ebenenwinkel,

b) wenn zwei Winkel als Ebenenwinkel und einer als der von den Ebenenwinkeln eingeschlossene Kantenwinkel,

Digitized by Google

c) wenn zwei Winkel als Ebenenwinkel und einer als der dem ersten Ebenenwinkel gegenüberliegende Kantenwinkel gegeben sind.

Man construirt in den drei Fällen mit den Supplementswinkeln der gegebenen nach früheren §§. die Supplementardreikante der gesuchten und setzt dann im Scheitel auf die drei Ebenen drei Perpendikel, nimmt von diesen nach §. 136. die gehörigen Stücke, die dann das gesuchte Dreikant bilden.

§. 152. Ein mehrkantiges körperliches Eck heißt convex, wenn jeder der vorkommenden Kanten- und Ebenenwinkel kleiner als zwei Rechte ist. Wir betrachten nur convexe körperliche Ecke.

§. 153. Die Summe sämmtlicher Kantenwinkel eines convexen körperlichen n Eckes ist kleiner als 2π.

Denn denkt man sich sämmtliche Kanten Fig 21. durch eine Hülfsebene geschnitten in den Punkten $A_1 A_2 \ldots A_n$, so hat man, wenn diese Punkte in der Hülfsebene verbunden werden, ein ebenes n Eck und es ist die Summe sämmtlicher Winkel $A_1 A_2 A_3 + A_2 A_3 A_4 \ldots + A_n A_1 A_2$ nach der Planimetrie $= (n-2)\pi$. Ferner haben wir n Dreiecke, die alle den Scheitel C gemeinsam haben, und daraus ist leicht: $A_1 O A_2 = \pi - (OA_1 A_2 + OA_2 A_1)$, $A_2 O A_3 = \pi - (OA_2 A_3 + OA_3 A_2) \ldots$ $A_n O A_1 = \pi - (OA_n A_1 + OA_1 A_n)$, somit die Summe aller an O liegenden Kantenwinkel $= A_1 O A_2 + A_2 O A_3 \ldots\ldots + A_n O A_1 = n\pi - (OA_1 A_n + OA_1 A_2 + OA_2 A_1 + OA_2 A_3 \ldots\ldots\ldots + OA_n A_1$ zu finden. Nun ist aber aus §. 137. in Dreikant das bei A_1 seinen Scheitel hat: $OA_1 A_n + OA_1 A_2 > A_n A_1 A_2$, ebenso ist $OA_2 A_1 + OA_2 A_3 > A_1 A_2 A_3$ und s. f. $OA_n A_{n-1} + OA_n A_1 > A_{n-1} A_n A_1$, deßhalb $OA_1 A_n + OA_1 A_2 + OA_2 A_1 + OA_2 A_3 + \ldots\ldots OA_n A_{n-1} + OA_n A_1 > (n-2)\pi$, somit die Summe aller Kantenwinkel bei O $< n\pi - (n-2)\pi$ oder $< 2\pi$.

§. 154. Die Summe sämmtlicher Ebenenwinkel eines convexen körperlichen n Ecks liegt zwischen $(n-2)\pi$ und $n\pi$. Denn da jeder Winkel kleiner als π ist, so müssen sämmtliche n Winkel kleiner als $n\pi$ sein. Denkt man sich ferner von O

Digitized by Google

aus auf die Hülfsebene den Perpendikel OB in Fig. 21. gezogen, so erhält man n Dreikante, wie z. B. OA_1A_2B, OA_2A_3B u. s. f., endlich OA_nA_1B. Aus §. 139. sind nun die Ebenenwinkel im ersten Dreikant größer als π, ebenso im zweiten u. s. f., also die Summe aller Ebenenwinkel der n Dreikante größer als $n\pi$. Die Summe dieser Ebenenwinkel ist aber um die um B herumliegenden vier Rechte größer als die Summe der Ebenenwinkel des n Kants, wie überaus leicht ersichtlich ist, folglich ist die Summe aller Ebenenwinkel des n Kants größer als $n\pi - 2\pi$, also liegt die Summe aller Ebenenwinkel zwischen $(n-2)\pi$ und $n\pi$.

§. 155. Ein mehrkantiges körperliches Eck heißt regelmäßig oder gleichseitig, wenn sämmtliche Kanten und Ebenenwinkel unter sich gleich sind.

In einem regelmäßigen körperlichen Eck muß jeder Kantenwinkel kleiner als $\frac{2\pi}{n}$ sein und jeder Ebenenwinkel liegt zwischen π und $\left(\frac{n-2}{n}\right)\pi$.

Der Beweis hiefür ist leicht aus §. 153. und §. 154. zu finden.

§. 156. Wenn man zwei aufeinanderfolgende Ebenenwinkel eines regelmäßigen Körperecks mittelst zweier durch die treffenden Kanten gelegten Ebenen halbirt, so schneiden sich die Halbirungsebenen in einer durch den Scheitel des Körperecks gehenden Geraden, die man Axe heißt. Die Axe macht mit allen Kanten und Ebenen des regelmäßigen Körperecks gleiche Winkel.

Daß die Schnittlinie der beiden Halbirungsebenen durch den Scheitel geht, folgt einfach aus §. 18. Daß ferner die Schnittlinie sowohl mit den zwei treffenden Kanten als mit allen übrigen denselben Winkel macht, folgt daraus: Bezeichnet man den Scheitel Fig. 21. mit O, die verschiedenen Kanten mit OA_1, OA_2, OA_3 ..... die Axe mit OB, so hat das Dreikant OA_1A_2B gleiche Ebenenwinkel an der Ebene A_1OA_2, da sie die halben Ebenenwinkel des regelmäßigen n Kants sind, folglich sind auch die Winkel

Digitized by Google

A_1OB und A_2OB nach §. 140. einander gleich. Ferner ist das Dreikant $OA_2A_3B \cong OA_1A_2B$. Denn Kantenwinkel $A_1OA_2 = A_2OA_3$, ferner Ebenenwinkel bei OA_1 gleich dem bei OA_2, und, wie eben bewiesen, $A_1OB = A_2OB$; hieraus folgt nothwendig, daß auch Kantenwinkel $A_1OB = A_2OB = A_3OB$ ist. Ebenso beweist man, daß OB mit jeder andern Kante denselben Winkel macht.

Es seien ferner OC_1 und OC_2 die Risse der Axe auf die Ebenen A_1OA_2 und A_2OA_3, folglich C_1OB und C_2OB die Winkel der Axe mit diesen Ebenen, so ist Dreikant $OC_1A_2B \cong OC_2A_3B$. Denn es ist Ebenenwinkel bei OC_1 gleich dem bei OC_2 als Rechter, Kantenwinkel $A_2OC_1 = A_3OC_2$ und Kantenwinkel $BOA_2 = BOA_3$ dann muß auch Kantenwinkel $BOC_1 = BOC_2$ sein. Auf gleiche Weise ist ersichtlich, daß die Axe auch mit den übrigen Ebenen denselben Winkel macht.

Anmerkung. Aus dem eben Erwiesenen und dem §. 81. kann leicht gefolgert werden, daß sich die Halbirungsebenen sämmtlicher Ebenenwinkel in einer Geraden schneiden und es also nur eine Axe gibt.

§. 157. Der Riß der Axe auf sämmtlichen Ebenen des regelmäßigen Körperecks halbirt die Kantenwinkel. Beweis einfach aus §. 79.

§. 158. Wenn man in einem Punkt der Axe eine Ebene senkrecht auf sie errichtet, so wird dieselbe von sämmtlichen Kanten geschnitten. Die Schnittpunkte sind alle gleichweit vom Scheitel entfernt und bilden ein regelmäßiges n Eck, dessen Centrum der Punkt der Axe ist.

Daß die Kanten die Ebene schneiden, ist leicht aus §. 55. zu schließen. Daß ferner die Schnittpunkte sämmtlich gleichweit vom angenommenen Punkt entfernt sind, ist leicht zu erkennen, und daß dann die Schrägen unter sich gleich sind, folgt aus §. 54. Weil nun sämmtliche Dreiecke $A_1OA_2 = A_2OA_3$ .... congruent sind, so erweist sich endlich auch die Gleichheit der Entfernungen der Schnittpunkte unter sich.

§. 159. Wenn man in einer regelmäßigen n Kante vom

Digitized by Google

Scheitel aus sämmtliche Kanten gleich macht, so liegen die Endpunkte der Kanten in einer auf der Axe senkrechten Ebene.

Beweis ist aus dem vorhergehenden Satze leicht zu finden.

§. 160. Zwei mehrkantige (nicht regelmäßige) körperliche Ecken heißen congruent, wenn sie gehörig auf einander gelegt, sich vollkommen decken. Sie sind es, wenn sämmtliche vorkommende Kanten- und Ebenenwinkel stückweise einander gleich sind und in derselben Weise auf einander folgen. Allein dieses findet schon Statt, wenn $n - 3$ auf einander folgende dieser Stücke gleich sind, wie als Beispiel der folgende Satz nachweist.

§. 161. Zwei n Kante sind congruent, wenn sie sämmtliche Kantenwinkel bis auf den letzten und sämmtliche Ebenenwinkel bis auf die zwei letzten stückweise gleich und in derselben Aufeinanderfolge haben.

Denn man kann dann die n Kante so auf einander legen, daß sämmtliche Kanten sich decken, sowie alle Ebenen bis auf die letzten zwei, aber auch diese müssen sich decken, da die in ihnen liegenden Kanten bereits auf einander liegen.

Digitized by Google

Zweiter Theil.

Von den Körpern.

Kapitel I.

Von den Obelisken, den pyramidalen und prismatischen Körpern.

§. 162. Man denke sich beliebig viele Geraden, deren Lage nur insofern beschränkt sei, daß man durch je zwei in bestimmter Weise aufeinanderfolgende immer eine Ebene legen kann, wie z. B. wenn man n Geraden hat, deren Aufeinanderfolge bestimmt ist, so muß durch die erste und zweite, durch die zweite und dritte u. s. f., endlich durch die nte und erste eine Ebene zu legen sein. Es kann somit die erste ganz beliebig angenommen werden, die zweite muß mit der ersten einen Punkt im endlichen oder im unendlichen Raum gemein haben, die dritte mit der zweiten u. s. f. Die nte muß so wohl mit der $(n-1)$ten als ersten in einer Ebene liegen und ist nach §. 117. zu finden. Diese Geraden nennen wir Seitenkanten und die durch je zwei von ihnen gelegten Ebenen nur so weit genommen, als sie zwischen den Seitenkanten (gewissermaßen als Streifen) abgegränzt sind, heißen wir Seitenebenen.

Digitized by Google

Die bis jetzt noch unendlichen Geraden und Seitenebenen (Streifen) denken wir von zwei unter sich parallelen Ebenen, die wir Grundebenen nennen, geschnitten, so daß jede Seitenkante von zwei Punkten und jede Seitenebene von zwei unter sich parallelen, in den Grundebenen liegenden Schnittlinien abgegränzt ist. Sowie aber die Seitenebenen und Kanten von den Grundebenen abgegränzt werden, so begränzen auch die Seitenkanten und Seitenebenen durch Punkte und diese verbindenden Geraden jede Grundebene als eine ebene Figur ab, und wir haben nun einen vollkommen geschlossenen Körper, der Obelisk heißt und folgende ebene Figuren zu Gränzen hat:

1) n Trapeze in den Seitenebenen; hierunter können auch Parallelgramme sein, wenn zwei aufeinanderfolgende Seitenkanten parallel sind; oder überschlagene Trapeze, wenn zwei aufeinanderfolgende Kanten ihren Schnittpunkt zwischen den Grundebenen haben; oder Dreiecke, wenn zwei aufeinanderfolgende Seitenkanten ihren Schnittpunkt in einer der Grundebenen haben.

2) Zwei n seitige Vielecke in den Grundebenen und jeder Seite in der einen entspricht eine parallele in der andern; jedoch kann auch einer Seite des einen Vielecks ein Punkt in der andern Grundebene entsprechen, wenn sich die zu der Seite in der einen Grundebene gehörigen Seitenkanten in einem Punkte der anderen Grundebene schneiden. So kann es kommen, daß jede Seite des einen einem Punkt der andern entspricht, also keine Seite in dem einen Vieleck eine entsprechende parallele im andern hat. Ja das eine Vieleck kann eine Gerade oder gar ein Punkt sein.

Die Entfernung der beiden Grundebenen heißt Höhe des Obelisken, die unter 1) bezeichneten Flächen heißen Seitenflächen und die unter 2) bezeichneten Grundflächen oder Basen. Die Kanten in den Grundflächen werden Grundkanten, die übrigen Seitenkanten genannt.

Jedes Eck des Körpers ist gewöhnlich dreikantig, zwei Grundkanten und eine Seitenkante. Treffen aber k Seitenkanten in den Punkt zusammen, so ist das Eck $(k + 2)$kantig.

Fig. 22., Fig. 23. und Fig. 24. stellen verschiedene Obelisken vor.

Digitized by Google

§ 163. Einen Obelisken kann man sich erzeugt denken:
a) dadurch, daß sich zwischen den Seitenflächen die Grundebene parallel von einer Lage zu einer andern fortbewegt;
b) dadurch, daß sich das eine Basisvieleck mit seinen Ecken auf den gegebenen Seitenkanten parallel aus einer Lage zur andern fortbewegt, indem es sich dabei entsprechend abändert.

§. 164. Sobald alle Seitenkanten parallel sind oder sich in einen unendlich weit entfernten Punkt schneiden, heißt der Obelisk prismatischer Körper oder Prisma. Leicht ist nachzuweisen, daß sämmtliche Seitenflächen eines Prismas Parallelogramme und die beiden Grundflächen congruente Vielecke sind. Stehen die Kanten auf einer, also auch auf der andern (§. 58.) Grundebene senkrecht und sind so nach §. 53. parallel, so heißt das Prisma ein senkrechtes, sonst schiefes.

§. 165. Ein Prisma, dessen Basen Parallelogramme sind, heißt Parallelepipedum. Es gibt auch wieder senkrechte oder schiefe Parallelepipeda. Das Parallelepipedum hat 6 Parallelogramme, wovon je zwei gegenüberstehende congruent sind, als Gränzflächen. Ein senkrechtes Parallelopipedum, das ein Quadrat zur Basis hat und dessen Höhe die Seite des Quadrats ist, hat sechs congruente Quadrate als Gränzflächen und heißt Würfel.

§. 166. Ein Prisma, welches regelmäßige Vielecke zu Grundflächen hat, heißt regelmäßig. Haben die Vielecke unendlich viele Seiten, d. h. sind sie Kreise, so heißt das Prisma Cylinder, es gibt senkrechte und schiefe Cylinder; wir betrachten nur den ersteren. Ein Cylinder hat somit zwei Kreise zu Basen, und sämmtliche Seitenflächen bilden die unter §. 66. genannte cylindrische Fläche, welche man seine Mantelfläche heißt.

§. 167. Wenn sich sämmtliche Seitenkanten in einem endlich entfernten Punkte schneiden, so heißt der Obelisk pyramidaler Körper. Ist dabei der Schnittpunkt in einer der Grundebenen, und bildet somit die eine Basis, so heißt der Körper Pyramide. Eine solche hat also nur eine Basis und die Seitenflächen sind alle Dreiecke. Der allen Seiten gemeinsame Punkt heißt Spitze. Ist der Schnittpunkt zwischen den Grundebenen, so heißt der Körper Doppelpyramide. Diese hat lauter in

Digitized by Google

einem Punkt überschlagene Trapeze, jedes aus zwei Paar unter sich ähnlichen Dreiecken bestehend, zu Seitenflächen und zwei ähnliche Vielecke zu Basen. Denn jede Seite in einem Vieleck entspricht einer Parallelen im andern, die Vielecke haben somit nach §. 37. gleiche Winkel. Ferner denke man sich von der Spitze den Perpendikel auf die beiden Grundebenen gefällt. Verbindet man den Fußpunkt in der einen Grundebene mit einem beliebigen Eckpunkt und den Fußpunkt in der andern Grundebene mit dem entsprechenden Ecke, so bilden die Verbindungsgeraden mit den die beiden Ecken enthaltenen Kantenstücken und den Perpendikeln rechtwinklige Dreiecke die ähnlich sind, woraus hervorgeht, daß sich die Verbindungslinien verhalten wie die beiden entsprechenden Entfernungen der Spitze von den Grundebenen, gleichgültig, welches Eck man dabei nimmt. Verbindet man zwei auf einander folgende Ecken in der einen Grundebene und die entsprechenden in der andern jedesmal mit dem Fußpunkt, so bilden diese Verbindungslinien mit einer Vieleckseite in jeder Grundebene ein Dreieck und beide sind, wie leicht nachweisbar, auch ähnlich, folglich verhält sich jede Vieleckseite zu ihrer entsprechenden, wie die Entfernungen der treffenden Grundebenen; woraus und wegen der Gleichheit der Winkel der Vielecke nun die Aehnlichkeit derselben von selbst hervorgeht.

Ist der Schnittpunkt endlich außerhalb der beiden Grundebenen, so heißt der Körper abgestumpfte Pyramide oder Pyramidalstumpf. Ein Pyramidalstumpf hat Trapeze zu Seitenflächen und auch wie die Doppelpyramide zwei ähnliche Vielecke zu Basen, was wie vorhin bewiesen wird. Endlich ist der Körperwinkel an der Spitze n kantig, die Körperwinkel an den Basen aber sind Dreikante. Die Pyramide, welche man sich zwischen der Spitze und der kleineren Grundfläche denken kann, heißt Ergänzungspyramide.

§. 168. Sobald die Basisvielecke regelmäßig bei pyramidalen Körpern sind, heißt man letztere regelmäßig und wenn die Basen Kreise sind, so heißt der pyramidale Körper Konus oder Kegel und zwar, dem vorigen Paragraph entsprechend, Kegel, Doppelkegel, Kegelstumpf. Ein Kegel hat einen Kreis zur Basis, sämmtliche Seitenflächen bilden aber die schon im §. 67. besprochene Kegelfläche, die auch hier Mantel des Kegels genannt wird. Wenn

Digitized by Google

die Geraden, welche von der Spitze zu den Mittelpunkten der Kreise gezogen werden, auf den Grundflächen senkrecht stehen, so fallen sie in eine Gerade und der kegelförmige Körper heißt dann senkrecht; wir betrachten nur solche.

§. 169. Weniger als drei Seitenkanten und drei Ebenen kann ein Obelisk nicht haben. Ein dreikantiger Obelisk ist aber entweder ein prismatischer oder ein pyramidaler Körper.

Denn eine Ebene allein, sowie auch zwei, können den Raum zwischen den zwei Grundebenen nicht begränzen; es sind somit wenigstens drei Seitenebenen nöthig, die aber weder alle drei noch zu zwei untereinander parallel sein, noch in einer Geraden sich schneiden dürfen. Es bleibt somit nun übrig, daß die drei Seitenebenen sich in drei Geraden schneiden, also hat jeder Obelisk auch wenigstens drei Seitenkanten. Nach §. 90. können diese aber nur entweder alle drei zusammen parallel sein, dann ist der Obelisk ein Prisma oder sie müssen sich in einem Punkt schneiden, dann ist der Obelisk ein pyramidaler Körper.

§. 170. Wenn ein Obelisk durch eine Ebene parallel zu den Grundebenen geschnitten wird, so wird auf dieser von den Seitenebenen ein Vieleck abgegränzt, welches man den Parallelschnitt des Obelisken heißt. Der Schnitt kann ein Punkt sein, wenn die Ebene durch die Spitze eines pyramidalen Körpers geht. Der Parallelschnitt kann auch eine Gerade sein für den Fall nämlich, wenn die sämmtlichen Seitenkanten in zwei Punkten der Schnittebene zusammenfallen.

§. 171. Der Parallelschnitt eines prismatischen Körpers ist ein zu den Grundebenen congruentes Vieleck.

Der Beweis ist ganz einfach aus §. 164. zu entwickeln.

§. 172. Der Parallelschnitt eines pyramidalen Körpers ist ein den Basen ähnliches Vieleck, dessen Seiten sich zu den Seiten einer Basis verhalten, wie die Entfernung der Spitze vom Schnitte von der zu der Basis.

Beweis wie in §. 167.

§. 173. Zwei Obelisken sind congruent, wenn sie je eine entsprechende Grundfläche, die an jedem Eckpunkt derselben liegenden körper-

Digitized by Google

lichen Ecke congruent und je eine entsprechende Seitenkante gleich lang haben.

Denn denkt man sich die beiden Obelisken auf einander gelegt, so daß sich die congruenten Grundflächen und sämmtliche daranliegende körperliche Vielecken decken, so liegen alle Seitenkanten auf einander und da zwei derselben gleich lang sind, so liegen auch die Endpunkte derselben auf einander und bilden nur einen. Da dieses aber Punkte der beiden andern Grundflächen sind, man aber durch einen Punkt nur eine Ebene parallel zu einer andern legen kann, so liegen auch die andern Grundebenen auf einander und die Obelisken decken sich vollkommen.

§. 174. Zwei prismatische oder pyramidale Körper sind congruent, wenn sie die Grundflächen und zwei entsprechende körperliche Ecken congruent sowie zwei entsprechende Seitenkanten gleich lang haben.

Beweis leicht aus dem vorhergehenden zu finden.

§. 175. Zwei pyramidale Körper sind congruent, wenn sie zwei Grundflächen und zwei entsprechende körperliche Dreikante congruent, ferner die dazu gehörigen zwei entsprechende Seitenkanten gleich lang und die auf diesen liegenden Entfernungen der Spitze von den Ecken der Basis gleich haben.

Denn legt man die beiden Körper mit den congruenten Grundflächen auf einander, so fallen wegen Congruenz der zwei Dreikante die beiden zugehörigen Seitenkanten der Richtung nach zusammen. Auf diesen decken sich ferner die Spitzen der beiden pyramidalen Körper, folglich haben sie sämmtliche Körperwinkel an den congruenten Basen congruent, und da sie endlich noch zwei gleiche Seitenkanten haben, so sind sie nach §. 173. congruent.

§. 176. Zwei pyramidale Körper sind congruent, wenn sie die beiden Körperwinkel an der Spitze congruent und drei Seitenkanten gleich lang haben.

Beweis leicht zu finden.

§. 177. Zieht man von einem Eckpunkt eines Körpers zu den übrigen Ecken Geraden und schneidet auf diesen Stücke ab, die zu den Geraden selbst in einem und demselben Verhältniß stehen (so z. B., daß das abgeschnittene Stück immer der n te Theil der

Digitized by Google

ganzen Geraden ist), verbindet ferner diejenigen Endpunkte der Stücke, deren Geraden im Körper auch verbunden sind, so entsteht ein neuer Körper, bei welchem alle Kanten zu den entsprechenden im ursprünglichen Körper im genannten Verhältniß stehen, ferner sind alle vorkommenden Kantenwinkel in einem den entsprechenden im andern gleich, endlich alle vorkommenden Vielecke in dem einen den entsprechenden im andern Körper ähnlich, so daß beide Körper ähnliche Gestalt haben und deßhalb ähnlich heißen.

Daß sämmtliche entsprechende Kanten des neuen Körpers zu denen des gegebenen im nämlichen Verhältnisse wie das Stück einer vom Eck gezogenen Geraden zu dieser selbst stehen, ist leicht ersichtlich, denn verbindet man die Endpunkte einer beliebigen Kante mit dem genannten Eckpunkte, trägt die Stücke im gehörigen Verhältnisse darauf und verbindet die Endpunkte derselben, so entspricht diese Verbindungslinie als Kante des neuen der Kante des alten Körpers. Beides sind nämlich entsprechende, parallele Seiten ähnlicher Dreiecke, von welchem die Stücke und die gezogenen Geraden die andern Seiten sind und deßhalb in dem gegebenen Verhältniß stehen, ferner schließen die zwei gegebenen Geraden denselben Winkel, wie die auf ihnen abgeschnittenen Stücke ein. Sämmtliche vorkommenden Kantenwinkel sind gleich, da, wie eben bewiesen, zwei Kanten in einem Körper parallel sind, zu zwei entsprechenden im andern und somit nach §. 37. gleiche Winkel bilden. Hieraus folgt endlich die Aehnlichkeit der vorkommenden Vielecke, da sämmtliche entsprechende Seiten im gleichen Verhältniß und sämmtliche Winkel gleich sind.

§. 178. Zwei Körper, welche zwei entsprechende körperliche Ecken congruent und alle aus den Scheiteln dieses Körperwinkels zu den übrigen entsprechenden Eckpunkten des Körpers gezogenen Geraden in demselben Verhältniß haben, sind ähnlich.

Denn solche zwei Körper kann man mit den congruenten Ecken auf einander legen, und dann hat man alles, was der vorige Satz voraussetzt und damit auch seine Folgen.

§. 179. Zwei prismatische oder pyramidale Körper sind ähnlich, wenn sie je ein entsprechendes körperliches Eck congruent und die zugehörigen Seitenkanten in gleichem Verhältniß haben,

Digitized by Google

wie zwei entsprechende Grundkanten und die Grundflächen selbst ähnlich haben.

Beweis ist leicht aus dem vorigen Paragraph zu finden.

§. 180. Wenn eine Pyramide parallel zur Grundebene geschnitten wird, so ist die zwischen der Spitze und Schnittebene neugebildete Pyramide der andern ähnlich.

Denn die Kanten der neuen haben zu denen der alten gleiches Verhältniß, folglich sind beide Körper nach §. 178. ähnlich.

§. 181. Zwei Pyramiden sind ähnlich, wenn sie die zwei Körperecken an den Spitzen congruent und drei entsprechende Seitenkanten im gleichen Verhältniß haben.

Denn denkt man sich beide Pyramiden mit ihren Spitzen auf einander gelegt, so liegen sämmtliche Kanten der Richtung nach auf einander und durch die Endpunkte der drei genannten Kanten des einen ist die Lage der beziehligen Grundebene bestimmt und diese selbst muß, wie leicht nachweisbar, parallel zur Grundebene der andern sein und deßhalb sind die Pyramiden nach §. 180. ähnlich.

§. 182. In zwei ähnlichen Pyramiden verhalten sich die Basen wie die Quadrate der Höhen.

Denn die Basen verhalten sich, als ähnliche Vielecke, wie die Quadrate entsprechender Seiten, diese aber verhalten sich wie die Quadrate der Höhen.

Kapitel II.

Von den regelmäßigen Körpern.

§. 183. Die obeliskenartigen Körper des vorigen Kapitels sind schon Körper einer besondern Art, nämlich solche, die zwei parallele Ebenen und an diesen alle vorkommenden körperlichen Ecken haben, es kommen jedoch auch ebenbegränzte Körper zum Betracht, die ihre körperlichen Ecken beliebig liegen haben; solche nennt man Vielflächner oder Polyeder; sie entsprechen dem Polygonen der Planimetrie. Wir betrachten von diesen nur die mit converen Ecken und auch von diesen nur einige wenige.

§. 184. Ein Polyeder wird regelmäßig genannt, wenn seine Ecken und seine Flächen regelmäßig und unter sich congruent sind. Es

Digitized by Google

gibt deren nur fünf, nämlich Tetraeder, Hexaeder, Dodekaeder, Oktaeder und Ikosaeder.

Bei einem regelmäßigen Polyeder kommt somit nur ein und dasselbe regelmäßige Vieleck und ein und dasselbe regelmäßige Vielkant vor. Der Polygonwinkel des erstern ist der Kantenwinkel des letztern und die Seiten des Vielecks sind zugleich Kanten des körperlichen Ecks.

Nun hat nach der Planimetrie

das regelmäßige Dreieck einen Winkel von 60°,
„ „ Viereck „ „ „ 90°,
„ „ Fünfeck „ „ „ 108°,
„ „ Sechseck „ „ „ 120° u. s. f.

Nach §. 155. muß aber der Kantenwinkel eines regelmäßigen Körperecks kleiner als $\frac{360}{n}$ sein, also muß er

für die dreikantigen Ecken kleiner als 120°,
für die vierkantigen Ecken kleiner als 90°,
für die fünfkantigen Ecken kleiner als 72°,
für die sechskantigen Ecken kleiner als 60° sein.

Aus diesem folgt, daß ein regelmäßiges Polyeder nur haben kann:

1) ein Dreikant als Eck und ein regelmäßiges Dreieck als ebene Fläche;
2) ein Dreikant als Eck und ein regelmäßiges Viereck als ebene Fläche,
3) ein Dreikant als Eck und ein regelmäßiges Fünfeck als ebene Fläche,
4) ein Vierkant als Eck und ein regelmäßiges Dreieck als ebene Fläche,
5) ein Fünfkant als Eck und ein regelmäßiges Dreieck als ebene Fläche.

§. 185. Es gibt ein regelmäßiges Polyeder, das vier Dreikante als Ecken und vier regelmäßige Dreiecke als ebene Flächen hat, und heißt Vierflächner oder Tetraeder.

Denn construirt man Fig. 25. in einer Ebene ein beliebiges regelmäßiges Dreieck $A_1A_2A_3$ und auf jeder Seite desselben noch drei weitere, kantet alsdann zwei der letzteren um A_1A_2 und

Digitized by Google

A_2A_3 um, daß sie mit zwei ihrer Seiten A_1A_4 zusammenfallen, so haben dieselben im Raum den Punkt A_4 gemein und das Dreieck $A_2A_4A_3$ ist congruent dem in der Ebene liegenden $A_2A_3A_4$, folglich schließt dieses, wenn auch um A_2A_3 umgekantet, den Körper vollkommen. Das Eck an A_4 ist dreikantig und hat wie die Ecken an A_1, A_2 und A_3 drei Kantenwinkel von je 60^0, somit ist dasselbe den andern Ecken congruent und ebenfalls regelmäßig.

§. 186. Es gibt ein regelmäßiges Polyeder, das acht regelmäßige Dreikante als Ecken, sechs regelmäßige Vielecke als Seitenflächen hat und Sechsflachner oder Hexaeder heißt.

Denn construirt man in einer Ebene Fig. 26. ein regelmäßiges Viereck $A_1A_2A_3A_4$ und auf jeder seiner Seiten vier weitere; werden nun letztere um A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 und A_4A_1 umgekantet, so daß die beiden A_1A_5, A_2A_6 und A_3A_7 je nur eine Kante bilden, dann fallen auch die A_4A_8 auf einander; denn wie leicht nachzuweisen ist, stehen dann diese Kanten A_1A_5 ꝛc. auf der Ebene $A_1A_2A_3A_4$ in den entsprechenden Punkten A_1, A_2, A_3 und A_4 senkrecht; da ferner die Punkte A_5, A_6, A_7 und A_8 gleichweit von dieser Ebene entfernt sind, so befinden sie sich in einer zu ihr parallelen Ebene und bilden ein zu $A_1A_2A_3A_4$ congruentes Quadrat; wenn man also ein sechstes Quadrat $A_5A_6A_7A_8$ noch an A_5A_6 construirt hat und es um A_5A_6 umkantet, bis die beiden A_8 und A_7 zusammenfallen, so ist der Körper vollkommen begränzt; daß sämmtliche Ecken regelmäßig und unter sich congruent sind, bedarf keines weiteren Beweises.

§. 187. Es gibt ein regelmäßiges Polyeder, das zwanzig regelmäßige Dreikante als Ecken und zwölf regelmäßige Vielecke als Flächen hat. Ein solcher Körper heißt Zwölfflächner oder Dodekaeder.

Denn construirt man ein regelmäßiges Fünfeck F. 27. $A_1A_2A_3A_4A_5$ und auf jede Seite noch ein weiteres, werden ferner diese um die Seiten des ersten regelmäßigen Fünfecks umgekantet, daß die zwei A_1A_8, A_2A_7, A_3A_8 und A_4A_9 immer zusammenfallen, so muß auch A_5A_{10} auf $A_5A'_{10}$ fallen, denn wie leicht nachzuweisen ist, sind die Dreikante $A_5A_4A_{10}A_1$ und $A_5A_4A_{10}'A_1$

congruent und da sie sich mit dem Winkel $A_4A_5A_1$ decken, so muß auch A_5A_{10} auf A_5A_{10}' fallen. Man erhält nun einen noch offenen Körper. Construirt man sich noch auf dieselbe Weise einen ihm ganz gleichen mit Hülfe eines Fünfecks $B_1B_2B_3B_4B_5$ u. s. w., so können beide Körper so zusammengehalten werden, daß sämmtliche Buchstaben von demselben Index, jedoch mit Ausnahme der von den zwei Grundfünfecken, z. B. A_6 und B_6, A_7 und B_7, A_8 und B_8, sowie A_{10} und B_{10}, A_{11} und B_{11} sich decken, daß ferner sämmtliche Dreikante, wie bei $A_1, A_6, A_{11}, B_6, B_{11}$ und B_1 u. s. f. zu einander congruent sind, läßt sich leicht beweisen; daß nämlich die an den zwei Grundfünfecken gleich sind, folgt aus der Gleichheit der drei Kantenwinkel, ferner ist das bei Eck A_6 dem bei A_1 congruent, den Ebenenwinkel bei A_1A_6 haben sie beide gemein und die an diesen liegenden Kantenwinkel haben sie als Vieleckwinkel gleich. Hieraus folgt aber leicht die Congruenz sämmtlicher Ecken. Daß der Körper ferner zwanzig Ecken und 12 Flächen hat, ist an und für sich klar.

§. 188. Es gibt ein regelmäßiges Polyeder, das sechs Vierkante als Ecken und acht regelmäßige Dreiecke als Seitenflächen hat. Er heißt Achtflächner oder Oktaeder.

Denn bildet man in einer Ebene ein regelmäßiges Sechseck, theilt es vom Centrum aus in 6 gleiche regelmäßige Dreiecke und schneidet zwei neben einander liegende davon ab, wie in Fig. 28., kantet sodann die Dreiecke um die Radiusseiten um, und bringt die zwei Seiten von den ausgeschnittenen Theilen zur Deckung, so erhält man ein regelmäßiges Vierkant, dessen Kanten alle gleichlang vom Scheitel aus abgeschnitten sind und deren Endpunkte somit in einer Ebene ein Quadrat bilden. Construirt man ferner auf die nämliche Weise dasselbe Vierkant und legt beide mit den congruenten Quadraten auf einander, so erhält man einen geschlossenen Körper mit 6 Ecken und acht Flächen; daß die beiden Vierkante congruent sind, ist von selbst ersichtlich, das Vierkant bei A_2 aber ist dem bei A_1 congruent, weil sie die Kantenwinkel alle und die Ebenenwinkel bis auf drei gleich haben, folglich sind so alle Ecken congruent ꝛc.

§. 189. Es gibt ein regelmäßiges Polyeder, das zwölf regelmäßige congruente Fünfecke als Ecken und zwanzig regel-

Digitized by Google

mäßige Dreiecke als Flächen hat. Man heißt es Zwanzigflächner oder Ikosaeder.

Denn construirt man wieder wie vorher ein regelmäßiges Sechseck und die Dreiecke, schneidet aber nur eines der letzten aus, wie in Fig. 29. das $A_2A_1A_2$ setzt dagegen auf jede der fünf bleibenden Sechseckseiten ein gleichseitiges auf, so hat man nun 10 Dreiecke. Die fünf Dreiecke des Sechsecks kantet man um die Radien um und zwar so, daß die zwei Seiten des ausgeschnittenen Dreiecks zusammenliegen. Man erhält nun ein regelmäßiges Fünfkant, dessen Scheitel der Mittelpunkt des Sechsecks ist. Die fünf Kanten selbst sind alle gleichlang und ihre Endpunkte bilden ein regelmäßiges Fünfeck. Alsdann kante man die übrigen fünf Dreiecke um die Sechseckseiten um und zwar so, daß die Ebenenwinkel an diesen Kanten dem Ebenenenwinkel des schon construirten Fünfkants gleich sind; es stehen diese dann gleichsam als fünf Zacken auf dem Fünfkant. Dabei bilden zwei äußere Punkte mit dem einwärts liegenden Punkt eines Einschnitts, wie $A_7A_8A_3$ ein gleichseitiges Dreieck, das den übrigen congruentl ist; denn es entsteht bei A_3 ein Fünfkant, welches dem beim Mittepunkt A_1 congruent ist, weil alle Kantenwinkel bis auf $A_7A_3A_8$ und alle Ebenenwinkel bis auf die an A_3A_7 und A_3A_8 gleich und in derselben Ordnung haben, somit ist der Winkel bei $A_7A_3A_8$ der eines regelmäßigen Dreiecks und die zwei Seiten A_3A_7 und A_3A_8 sind ohnehin Seiten der übrigen Dreiecke, woraus die Congruenz sämmtlicher Dreiecke hervorleuchtet. Man macht nun dieselbe Anordnung nochmals und paßt die Zacken des einen in die Vertiefungen des andern, und man erhält dann einen geschlossenen Körper mit 12 Ecken. Die neuentstandenen Fünfkante bei A_3 oder A_7 ꝛc. sind aber den schon gebildeten, wie vorhin bewiesen und deßhalb auch unter sich congruent. Daß der Körper endlich zwanzig regelmäßige Dreiecke als Flächen hat, ist ebenfalls leicht ersichtlich.

§. 190. In einem regelmäßigen Polyeder schneiden sich alle zu den Ebenen gehörige Axen in einem Punkt. Dieser Punkt liegt in den von den Vieleckmittelpunkten auf die Ebene der Vielecke, sowie in den Mittelpunkten der Kante auf diese errichteten Perpendikeln nnd ist gleichweit von sämmtlichen Ecken,

Digitized by Google

sämmtlichen Kanten und sämmtlichen Vielecksmittelpunkten entfernt, weßhalb er selbst der Mittelpunkt oder das Centrum des regelmäßigen Polyeders heißt. Wir wollen zuerst beweisen, daß die Aren zweier an einer Kante liegenden Ecken in einem Punkt zusammentreffen und dieser von den zwei Ecken und Kanten gleichweit entfernt ist und im Perpendikel liegt, der vom Mittelpunkt desjenigen Vielecks, zu welchem die Kante gehört, auf seine Ebene errichtet ist. Alsdann beweisen wir, daß, wenn sich zwei Aren schneiden, auch alle jene Aren, die zu Eckpunkten desselben Vielecks gezogen werden, diesen Schnittpunkt gemein haben, woraus dann leicht alles Uebrige hervorgeht.

Wenn man im Vielecke $A_1A_2A_3A_4A_5$ Fig. 30. vom Centrum B_1 die Geraden A_1B_1 und A_2B_1 zu den Ecken zieht, welche die Vieleckswinkel bei A_1 und A_2 halbiren, hierauf in B_1 auf die Ebenen des Vielecks einen Perpendikel errichtet und durch A_1B_1 und diesen Perpendikel eine neue Ebene legt, so enthält diese die zum Ecke A_1 zu ziehende Are (aus §. 156.) Diese Are wird den Perpendikel in den Punkt O schneiden und es wird dadurch ein rechtwinkliges Dreieck OA_1B_1 gebildet. Ebenso bildet sich durch die zu A_2 gehörige Are ein Dreieck $O'A_2B_1$; beide Dreiecke müssen aber congruent sein, da $A_1B_1 = A_2B_1$, die Winkel bei B_1 als Rechte und die bei A_1 und A_2 deßhalb gleich sind, weil sie die Winkel bei der Are mit der Vieleckebene bedeuten. Hieraus folgt $OB_1 = O'B_1$, oder es schneiden sich beide Aren in einem Punkt O, der zum Perpendikel gehört, welcher im Mittelpunkt des Vielecks auf diese Ebene errichtet ist. Weil ferner $OA_1 = OA_2$ ist, so ist dieser Punkt von beiden Ecken gleichweit entfernt. Sind ferner C_1 und C_2 die Mitten zweier Kanten, so ist $OC_1 = OC_2$ und OC_1 auf A_1A_2, sowie OC_2 auf A_2A_3 nach §. 50. senkrecht, somit auch O von beiden Kanten gleichweit entfernt.

In ganz gleicher Weise kann bewiesen werden, daß die Are OA_3 und dann jede andere des betrachteten Vielecks durch O geht und O von seinen Ecken und Kanten gleichweit entfernt ist.

Digitized by Google

Nun aber sind A_1 und A_2 zwei Punkte des Vielecks $A_1 A_2 A_6 A_7 A_8$, A_2 und A_3 zwei Punkte des Vielecks $A_2 A_3 A_9 A_{10} A_{11}$ ꝛc., folglich schneiden sich die Axen, die zu diesen Endpunkten gezogen werden, gleichfalls im Punkt O und dieser muß in dem zu den Mittelpunkten dieser Vielecke auf ihre Ebenen gezogenen Perpendikel liegen, woraus dann wieder weiter auch auf die Axen solcher Ecken, die in noch nicht genannten Vielecken liegen, in ähnlicher Weise zu schließen ist.

Endlich ist noch nachzuweisen, daß $OB_1 = OB_2 = OB_3$ ꝛc. ist. Die rechtwinkligen Dreiecke OB_1A_1 und OB_2A_1 sind congruent, denn $A_1O = A_1O$ und $A_1B_1 = A_1B_2$, folglich ist $OB_1 = OB_2$, ebenso beweist man auch $OB_2 = OB_3$ u. s. f.

Kapitel III.

Von den drei elementaren runden Körpern.

§. 191. Die Kugel ist ein Körper, welcher von der Kugelfläche, d. h. nach §. 68. von einer Fläche, deren Punkte zu einem Punkt gleiche Entfernung haben, eingeschlossen ist. Der genannte Punkt heißt Centrum oder Mittelpunkt und die Verbindung desselben mit einem Punkt der Fläche heißt Radius oder Halbmesser. Ein Punkt, der weiter als der Radius vom Centrum entfernt ist, kann kein Kugelpunkt und ein näherer muß einer sein.

§. 192. Eine Gerade oder eine Ebene, welche vom Mittelpunkt einer Kugel um den Kugelradius entfernt ist, hat mit der Kugel einen Punkt auf ihrer Oberfläche gemein, jeder andere Punkt der Geraden und Ebene ist außerhalb der Kugel. Die Gerade heißt Berührende oder Tangente, die Ebene Berührungsebene oder Tangentialebene.

Denn nach §. 54. ist die Entfernung eines Punktes von einer Geraden und Ebene die Länge der Senkrechten von genanntem Punkt bis zum Fußpunkt. Da nun letzterer hier von dem Mittelpunkt um den Radius entfernt ist, so ist er ein Punkt der Kugelfläche. Ferner sind sämmtliche übrigen Punkte der Geraden oder Ebene nach §. 54. weiter vom Centrum entfernt, und können somit keine Kugelpunkte sein.

Digitized by Google

§. 193. Eine Gerade oder Ebene, die weiter als um den Radius vom Centrum einer Kugel entfernt sind, haben keinen Punkt mit ihr gemein.

Beweis leicht wie vorhergehender zu führen.

§. 194. Eine Gerade, die näher als um den Radius vom Centrum einer Kugel entfernt ist, liegt mit einem Stücke ganz in der Kugel, das von zwei Oberflächen-Punkten begränzt ist, die von dem Fußpunkt der Senkrechten, welche auf sie vom Centrum aus gefällt ist, gleichweit entfernt sind.

Denn da die Entfernung der Geraden vom Centrum kleiner ist als der Radius, so ist der Fußpunkt der Senkrechten ein Kugelpunkt und auf seinen beiden Seiten liegen unzählig viele Punkte, die immer (gleichmäßig) größer werdende Entfernung von letzterem haben, bis zwei kommen, welche vom Centrum dieselbe wie die Oberflächenpunkte haben, also selbst solche sind.

Anmerkung. Je näher eine Gerade dem Mittelpunkte ist, ein desto größeres Stück liegt von ihr in der Kugel; geht sie gar durch den Mittelpunkt, so ist sie so groß als zwei Radien und heißt Durchmesser.

Der Radius zum Endpunkt, die eine Hälfte des gemeinsamen Geradenstücks und der Perpendikel vom Centrum bilden nämlich ein rechtwinkliges Dreieck, wovon letztere Seiten Katheten sind. Wenn aber bei beständiger Hypotenuse eine Kathete abnimmt, wächst die andere.

§. 195. Eine Ebene, welche vom Centrum einer Kugel eine kleinere Entfernung hat, als der Radius ist, schneidet die Kugel in einem Kreis, dessen Centrum der Fußpunkt der Senkrechten ist, die vom Centrum auf die Ebene gefällt werden kann, und dessen Radius die halbe Länge des mit der Kugel gemeinsamen Stückes einer Geraden beträgt, die durch den Fußpunkt des Perpendikels geht und in der Ebene liegt. Je näher die Ebene dem Centrum ist, desto größer ist der Schnittkreis und wird am größten, wenn die Ebene durchs Centrum geht, und dann ist sein Radius dem der Kugel selbst gleich. Letzteren Schnitt heißt man Centralschnitt oder größten Kreis. Beweis leicht aus §. 194.

Digitized by Google

Durch zwei Punkte der Kugel läßt sich immer der Centralschnitt, also durch zwei Punkte der Oberfläche ein größter Kreis denken, denn die Ebene desselben findet man leicht, wenn man die Punkte mit dem Centrum durch Geraden verbindet. Zwei größte Kreise haben immer zwei Punkte gemein und halbiren sich gegenseitig, denn ihre Ebenen haben einen Durchmesser der Kugel gemein.

§. 196. Die zwei Stücke, in welchen eine Ebene die Kugel theilt, heißt man Kugelabschnitte oder Kugelhaube. Geht die Ebene durch das Centrum, so sind beide Theile congruent und man heißt sie Halbkugeln.

Denkt man sich vom Centrum aus an den Umfang eines Kugelebenenschnitts Radien gezogen, so bilden diese mit der Schnittebene einen Kreiskegel. Diesen sammt den zugehörigen auf der Schnittfläche ruhenden Kugelabschnitt heißt man Kugelausschnitt.

§. 197. Den Durchmesser einer Kugel, welcher zu einer sie schneidenden Ebene senkrecht steht, heißt man die zur Ebene und allen damit parallelen andern Schnittebenen gehörige Axe, die Endpunkte der Axe heißen Pole, die Schnitte der Kugelfläche und der parallelen Ebenen Parallelkreise, den hiezu gehörigen Centralschnitt Aequator. Sämmtliche durch die Axe gehenden Ebenen stehen nach §. 60. auf den Parallelebenen senkrecht, sind Centralschnitte und heißen Meridianebenen. Das Kugelstück zwischen zwei Parallelkreisen heißt Zone, (körperliche und Flächenzone). Das Kugelstück zwischen zwei halben Meridianebenen Kugelzweieck.

§. 198. Der Bogen eines größten Kreises zwischen zwei Punkten der Kugeloberfläche ist kleiner als die Summe zweier andern solcher Bögen, die die beiden Endpunkte und einen dritten Punkt mit einander verbinden.

Sind **A** und **B** die zwei ursprünglichen Punkte und **C** der dritte, so soll sein Bogen **AC** und Bogen **AB** größer als Bogen **AB** sein. Es sei **O** das Centrum der Kugel, dann denke man sich die drei Radien **OA**, **OB** und **OC** gezogen, man erhält dadurch ein Dreikant und nach §. 137:

$$\mathbf{AOC} + \mathbf{BOC} = \mathbf{AOB}.$$

Digitized by Google

Zu diesem Winkel sind aber die genannten Bögen Bögen desselben Kreises und es gilt somit der behauptete Satz. Mit Hülfe dieses Satzes und mehrerer anderer Erwägungen kann nachgewiesen werden, daß die kürzeste Entfernung zweier Punkte in der Kugelfläche gemessen wird auf dem zwischen ihnen liegenden Bogen des größten Kreises.

§. 199. Der Winkel zweier Centralschnittebenen wird entweder durch den zwischen ihnen liegenden Aequatorbogen oder durch den Winkel der zwei Tangenten, welche zu dem Kreisschnitte im gemeinschaftlichen Pol, dem Schnittpunkt der Kreise, gehören, gemessen. Man heißt denselben deßhalb auch den Winkel der größten Kreise.

Sind z. B. Fig. 31. PAP′ und PBP′ zwei größte Kreise, die sich in P und P′ schneiden und ist AB ein Aequatorealbogen, so ist PP′ senkrecht auf AO und BO, also AOB der Linienwinkel der beiden Ebenen, der zum Maaße den Bogen AB hat. Denkt man sich in den beiden Ebenen in P Tangenten PC und PD an die beiden Kreise gezogen, so sind sie auf PP′ senkrecht, also ist CPD, weil = AOB, ebenfalls Winkel der beiden Ebenen.

§. 200. Da aus den beiden letzten Sätzen leicht hervorgeht, daß die größten Kreise in der Kugelfläche das sind, was die Geraden in der Ebene, so spricht man von sphärischen oder Kugeldreiecken, Vielecke u. s. w. und versteht darunter Kugeloberflächestücke von drei oder mehreren größten Kreisen abgegränzt.

Die drei Eckpunkte eines Kugeldreiecks kann man mit dem Centrum verbinden und erhält dadurch ein Dreikant; den Kantenwinkeln dieses entsprechen die Kreisbögen oder die Seiten des Kugeldreiecks und den Ebenenwinkeln des Dreikants die Winkel der Kreisbögen. Es haben deßhalb die sechs Stücke eines sphärischen Dreiecks dieselbe Beziehung zu einander, wie die eines Dreikants, und es wird eine leichte Uebung sein, die darüber früher gehabten Dreikantssätze auf das sphärische Dreieck anzuwenden. *)

*) Ein Weiteres hierüber siehe mein Lehrbuch der Trigonometrie Seite 252—255.

Digitized by Google

§. 201. Aufgabe. An eine Kugel eine Tangente zu konstruiren, die parallel zu einer gegebenen Geraden ist.

Man zieht einen zur Geraden parallelen Durchmesser und denkt sich durch diesen eine Ebene gelegt, die die Kugel in einem größten Kreise schneidet. In dieser Ebene construirt man nach der Planimetrie eine Tangente an den Kreis, parallel zum Durchmesser, indem man einen zweiten Durchmesser auf den ersten senkrecht stellt und an dessen Endpunkten zwei Parallelen zum ersten zieht.

Jede Tangente zum größten Kreis ist auch eine Tangente zur Kugel, weil sie in der Hülfsebene liegt, und in dieser mit der Kugel nur den Berührungspunkt gemein hat. Sämmtliche durch den Durchmesser gehende Centralschnitte haben nur zwei solche zur gegebenen Geraden parallele Tangenten. Die Berührungspunkte aller bilden, wie leicht zu begreifen, den zum Durchmesser als Axe gehörigen Aequator und die Tangenten selbst bilden, weil alle vom Centrum um den Radius entfernt, nach §. 66. eine Cylinderfläche, die man Berührungscylinder zur Kugel heißt.

§. 202. Durch einen Punkt eine Tangente zu legen.

a) der Punkt liegt auf der Kugelfläche und ist somit gleichzeitig Berührungspunkt.

Man zieht zu ihm den Kugelradius und legt auf ihn senkrecht durch den Punkt eine Ebene, so ist diese eine Tangentialebene nach §. 192. und jede in ihr liegende durch den Punkt gehende Gerade ist, wie leicht nachweisbar, eine Tangente.

b) Der Punkt ist außerhalb der Kugelfläche.

Dann legt man durch ihn und das Kugel-Centrum eine Gerade und denkt sich durch diese Gerade eine Hülfsebene gelegt, die dann die Kugel in einem größten Kreis schneidet; in der Ebene zieht man vom gegebenen Punkt an den Kreis nach der Planimetrie die möglichen zwei Tangenten; mit diesen macht die zuerst gezogene Gerade einen bestimmten Winkel und die Berührungspunkte haben eine leicht bestimmbare Entfernung von ihr.

So viele Centralschnitte nun durch die Hülfsgerade gehen, so viel solcher Tangenten und Berührungspunkte erhält man; erstere bil-

Digitized by Google

den nach §. 67. eine Kegelfläche und letztere einen zur Axe senkrechten Kreis.

§. 203. Eine Tangentialebene parallel zu einer gegebenen Geraden finden.

Man nimmt parallel zur Geraden einen Kugeldurchmesser an, dann ist jede zu diesem parallele und um den Radius von ihm entfernte Ebene eine gesuchte.

§. 204. Eine Tangentialebene zu finden, parallel zu einer gegebenen Ebene.

Man legt durch den Mittelpunkt eine Ebene parallel und zu dieser eine zweite parallele und von ihr um den Radius entfernte. Man findet deren zwei; der Berührungspunkt ist der Endpunkt des auf der Centralebene senkrechten Radius.

§. 205. Eine Tangentialebene zu finden, die durch einen gegebenen Punkt geht.

a) der Punkt ist ein Oberflächepunkt, also zugleich der Berührungspunkt.

Auflösung in §. 202.

b) Der Punkt ist außerhalb der Kugel.

Man sucht nach §. 202b). zuerst eine Tangente und deren Berührungspunkt; wird dann durch letzteren eine zweite nach §. 202a.) gezogen und durch beide Tangente eine Ebene gelegt, so ist dieß die verlangte.

§. 206. Ein Cylinder und eine zu seiner Axe parallele Ebene haben eine Gerade gemein, wenn die Ebene dieselbe Entfernung hat, wie die Erzeugungsgeraden des Cylinders. Eine solche Ebene heißt Tangentialebene zum Cylinder und die gemeinsame Gerade heißt Berührungsgerade. Daß die Ebene eine Gerade mit dem Cylinder gemein hat, geht leicht aus §. 105. hervor. Daß aber die Ebene nichts weiter mit dem Cylinder gemein haben kann, folgt leicht aus §. 56. Der Durchschnitt einer Tangentialebene und der Basisebene ist nothwendig eine Tangente zum Basiskreis. Eine jede Gerade der Tangentialebene, die nicht zur Berührungsgeraden parallel ist, hat mit dem Cylinder einen Punkt gemein und heißt Tangente zum Cylinder.

§. 207. Denkt man sich einen Cylinder über eine Tangentialebene parallel zur Axe hingerollt, so hat er in jeder neuen

Digitized by Google

Lage eine neue Gerade mit der Ebene gemein; denkt man sich dieß so lange fortgesetzt, bis wieder die erste Gerade Berührungsgerade ist, so bilden sämmtliche Berührungsgeraden ein Rechteck, das zur Höhe die Höhe des Cylinders und zur Breite den Umfang der Cylinderbasis hat. Dieses Rechteck hat somit dieselbe Fläche, wie der Cylinder. Man heißt es die abgewickelte Cylinderfläche.

§. 208. Eine jede Ebene, die zur Axe parallel ist und ihr näher liegt, als die Cylindergerade, schneidet den Cylinder in einem Rechteck, dessen eines Paar paralleler Seiten in der Grundebene liegt und dessen zwei andere aber Cylindergeraden sind.

Beweis ist unschwer zu führen.

§. 209. Eine jede zur Axe senkrechte Ebene ist parallel zu den Basen und schneidet somit nach §. 171. den Cylinder in einem, den Basen congruenten Kreis.

§. 210. Eine jede, die Axe schief schneidende Ebene hat mit dem Cylinder eine ebene Figur gemein, die von einer krummen geschlossenen Linie begränzt ist, welche den Schnitt der Ebene und der Cylinderfläche vorstellt und die unter dem Namen Ellipse bekannt ist.

§. 211. Eine Tangentialebene zum Cylinder finden, wenn der Berührungspunkt gegeben ist.

Da die Ebene eine Cylindergerade, die durch den Punkt geht, enthält, so zieht man vor Allem durch den Punkt eine parallele Gerade zur Axe des Cylinders. Ferner muß der Durchschnitt der Berührungsebene und der Basis eine Tangente zum Basiskreis seyn, errichtet im Punkte, in welchem die Berührungsgerade des Cylinders die Basis schneidet. Durch diese Tangente und die gezogene Berührungsgerade ist aber die Tangentialebene vollkommen bestimmt.

§. 212. Eine Tangentialebene zum Cylinder finden, die durch einen außerhalb liegenden Punkt geht.

Man zieht durch den Punkt eine Hülfsgerade, parallel zur Axe. Vom Punkt, wo diese die Basis schneidet, eine Tangente zum Kreis, so geht die Tangentialebene durch die Hülfsgerade und diese Tangente.

Digitized by Google

§. 213. Eine Tangentialebene zum Cylinder finden, die parallel ist zu einer gegebenen Ebene.

Man sucht den Durchschnitt der Ebene und der Basis und zieht mit diesem parallel eine Tangente zum Kreis, so ist die Tangentialebene durch diese und durch die zum Berührungspunkt gehörige Cylindergerade bestimmt; ist nun letztere zur Ebene parallel, so ist die Aufgabe möglich, im entgegengesetzten Falle nicht.

§. 214. Ein Kegel und eine Ebene haben eine Gerade und nichts weiter mit einander gemein, wenn die Ebene durch die Spitze geht und zur Kegelbasis dieselbe Neigung hat, wie die Kegelgerade. Man heißt diese Ebene Tangentialebene zum Kegel.

Daß die Ebene mit dem Kegel eine Gerade, die Berührungsgerade, gemein hat, ist nach §. 86. und 87. leicht zu beweisen. Daß aber die Ebene keinen weitern Punkt mit der Kegelfläche gemein hat, erhellt daraus, daß jede Gerade, die durch die Kegelspitze und einen beliebigen Punkt der Ebene gezogen wird, nach §. 92a. einen kleineren Winkel mit der Basis machen würde, folglich keine Gerade der Kegelfläche sein kann.

Die Tangentialebene schneidet die Basis längs einer den Basiskreis tangirenden Geraden, deren Berührungspunkt der Schnittpunkt der Berührungsgeraden und der Basisebene ist.

§. 215. Denkt man sich einen Kegel auf eine ihn berührende Ebene gelegt und ihn dann um die Spitze auf die Ebene hingerollt, so kommt bei jeder neuen Lage eine neue Kegelgerade zur Berührung, und es werden deßhalb, wenn man solange nach einer Richtung dreht, bis die erste Berührungsgerade wieder in die Ebene fällt, sämmtliche Kegelgeraden in die Ebene gefallen sein und hierin, da sie alle gleichlang sind, einen (beim Doppelkegel zwei) Kreisausschnitt erzeugt haben, dessen Radius die Länge der Kegelgeraden, dessen Centrum die Kegelspitze und dessen Bogenlänge der Umfang der Basis ist. Man heißt diesen Ausschnitt die abgewickelte Kegelfläche.

§. 216. Wenn eine Ebene durch die Spitze eines Doppelkegels geht und mit der Basis keinen kleinern Winkel als die Kegelgeraden macht, so hat sie mit dem Kegel die Fläche eines

Digitized by Google

ebenen überschlagenen Trapezes gemein, dessen parallele Seiten die Schnittlinien in den Basen und dessen Ueberschlagungspunkt die Kegelspitze ist.

Beweis ist unschwer zu führen.

§. 217. Wenn eine Ebene nicht durch die Spitze geht, so können folgende vier Fälle stattfinden:

a) Die Ebene macht mit der Axe einen rechten Winkel, dann ist der Durchschnitt nach §. 172. ein Kreis.

b) Die Ebene macht mit der Axe denselben Winkel wie die Kegelgeraden, dann schneidet sie blos den einen Kegelmantel in einer krummen, nicht geschlossenen Linie, die man Parabel heißt.

c) Die Ebene macht mit der Axe einen größeren Winkel, als die Kegelgeraden, dann schneidet sie blos den einen Kegelmantel und diesen in einer Ellipse.

d) Die Ebene macht mit der Axe einen kleinern Winkel als die Kegelgeraden, dann schneidet sie beide Kegelmantel in einer Linie, die zwei getrennte, nicht geschlossene Theile hat und Hyperbel heißt.

Den drei Linien gibt man oft den gemeinschaftlichen Namen Kegelschnittslinien, da sie mit dem Kreis und der Geraden die möglichen Schnittlinien einer Ebene und der Kegelfläche vorstellen. Der Kegelkörper selbst hat eine ebene Figur zum Schnitt, die zu Gränzen die eben genannten verschiedenen Kegelschnittslinien hat.

§. 218. Eine Tangentialebene zu einem Kegel zu finden, wenn der Berührungspunkt gegeben ist.

Man zieht durch den Punkt die Kegelgerade und wo diese die Basis trifft, eine Tangente an deren Kreis, so bestimmen diese Tangente und die Kegelgerade die gesuchte Ebene.

Leichter Beweis.

§. 219. Eine Tangentialebene zu dem Kegel zu finden, die durch einen Punkt außerhalb des Kegels geht.

Man verbindet den Punkt mit der Spitze des Konus und sucht den Schnittpunkt dieser Geraden und der Basis, zieht von diesem an den Basiskreis eine Tangente, so geht die Tangentialebene durch diese und die gezogene Gerade. Beweis unschwer zu finden.

Digitized by Google

§. 220. Eine Tangentialebene zu finden, die zu einer gegebenen Ebene parallel ist.

Man sucht den Durchschnitt der gegebenen Ebene und der Kegelbasis und zieht damit eine parallele Tangente an den Basiskreis. Nun ist die gesuchte Ebene durch diese Tangente und die von der Spitze bis zum Berührungspunkt gehende Kegelgerade bestimmt, ist letztere aber nicht zur gegebenen Ebene parallel, so ist die Aufgabe unmöglich.

Oder man legt durch die Spitze eine Ebene parallel zur gegebenen Ebene und tangirt diese, so ist es die verlangte.

§. 221. Durch eine Gerade eine Ebene zu legen, welche einen Kegel berührt.

Man legt durch die Spitze und die Gerade eine Ebene. Tangirt diese, so ists die verlangte, tangirt sie nicht, so ist die Aufgabe unmöglich. Geht aber die Gerade durch die Spitze, so kann man leicht die Tangentialebene finden.

Kapitel IV.

Von der Berechnung des Inhalts der Oberflächen von Körpern.

§. 222. Für Oberflächen, welche ebene Figuren sind, hat man nach der Planimetrie leicht den Flächeninhalt zu suchen, so z. B. bei sämmtlichen obeliskartigen Körpern (wenn die Basen nicht gerade Kreise oder überhaupt von Curven begränzte ebene Figuren sind), sucht man sowohl den Inhalt der Basen, als auch die der einzelnen Seitentrapeze und dann gibt die Summe der einzeln erhaltenen Inhalte die Oberfläche des Obelisken.

§. 223. Die Mantelfläche eines Cylinders findet man, wenn man den Umfang der Basis mit der Höhe multiplicirt. Denn nach §. 207. ist die Mantelfläche einem Rechteck gleich, dessen Basis der Umfang des Cylinders und dessen Höhe seine Höhe ist.

Bedeutet demnach

m = Mantelfläche ,

u = Umfang des Cylinders,

Digitized by Google

r = Radius des Cylinders,
h = Höhe des Cylinders und
π = 3,1415,
so ist $m = uh = 2r\pi h$.

§. 224. Die Mantelfläche des Kegels findet man, wenn man den Umfang der Basis mit der Kegelgeraden multiplicirt und mit 2 dividirt.

Denn es sei bei einem Kreisausschnitt der Inhalt = i, der Radius des Kreises = r und die Bogenlänge = b, so ist $i : r^2\pi = b : 2r\pi$ oder $i = \frac{rb}{2}$. Nach §. 215. ist aber der Flächeninhalt des Konus ein Kreisausschnitt, dessen Radius die Kegelgerade und dessen Bogenlänge der Umfang der Kegelbasis ist, also hat man am obigen Satze $m = \frac{us}{2} = r\pi s$, wenn s die Länge der Kegelgeraden bedeutet.

§. 225. Die Mantelfläche eines parallel abgestutzten Kegels findet man, wenn man die halbe Summe der Umfänge beider Kreisbasen mit dem von ihnen abgegränzten Stück der Kegelgeraden multiplicirt. Die Mantelfläche des ganzen Kegels ist $R\pi S$, die des kleinen abgeschnitten $r\pi s$, wo R,r, S und s Radius und Länge der Kegelgeraden bedeuten, somit hat man für den Mantel des abgestumpften Kegels = π (RS — rs). Es bedeute nun a das Stück der Kegelgeraden zwischen den beiden Basen, so ist $a = S - s$, ferner ist leicht ersichtlich,
$S : s = R : r$ oder $S : S - s : R : R - r$, d. h.
$S = \frac{aR}{R-r}$ und $s = \frac{ar}{R-r}$, also ist $m = \pi\left(\frac{aR^2 - ar^2}{R-r}\right)$

$$= \pi a (R + r) = a\left(\frac{U+u}{2}\right)$$

wenn U den Umfang des großen Basiskreises und u den des kleinen bedeutet.

§. 226. Die Mantelfläche einer Kugelzone findet man, indem man den Kugelumfang mit der Höhe der Zone multiplicirt.

Digitized by Google

Denn es stelle Fig. 32. ABCD eine Kugelzone mit sehr geringer Höhe CG von einer Kugel, deren Centrum in O und deren Radius = OE ist, vor, so kann AC als gerade Linie gelten und die Mantelfläche der Zone als die eines abgestutzten Kegels, somit ist ihre Fläche $m = \left(\frac{AB + CD}{2}\right) \pi . AC$, oder, weil in dem Trapeze ABCD $EF = \frac{AB + CD}{2}$ ist, $m = EF . AC \pi$;

da ferner die Dreiecke ACG und EHO zu einander ähnlich sind, also AC : OE = CG : EH d. h. AC . EH = OE.CG oder AC. EF = 2OE. CG somit $m = 2rh\pi = uh$, wenn u den Kegelumfang und h die Höhe der Zone bedeutet. Ist nun die Zone breit, so kann man sie sich durch Ebenen parallel zu ihren Basen in beliebig schmalen Zonen zerlegt denken, deren Höhe $h_1, h_2 \ldots . h_n$ sei, wo aber $h_1 + h_2 + \ldots . h_n = h$ der Höhe der breiten Kugelzone ist, dann besteht die Mantelfläche der breiten aber aus der Summe der der schmalen Zone, folglich $m = (h_1 + h_2 + \ldots . + h_n)u = hu$, w. z. b. w.

Bei der Halbkugel ist $h = r =$ Kugelradius, also $m = 2r^2\pi$, bei der ganzen Kugel $m = 4r^2\pi$; $r^2\pi$ ist aber Inhalt der Kreisscheibe, die den Radius r hat, also ist die Oberfläche einer Kugel viermal so groß als ein Centralschnitt von ihr. —

Kapitel V.

Vom Volumen oder körperlichen Inhalt und dessen Berechnung.

§. 227. Den Raum, den die Körper von dem unendlichen abgränzen, nennt man ihren Inhalt oder ihr Volumen, insbesondere in Rücksicht auf die Größe desselben. Zur Bestimmung der Größe geht man vom Inhalt eines Würfels als Maßeinheit aus, welcher die Längeneinheit als Seite hat, und man heißt dann die Zahl, welche angibt, wie vielmal mehr Raum der der Betrachtung unterworfene Körper als die Würfeleinheit hat, kurzweg des Körpers Inhalt, so z. B. bedeutet der Ausdruck n Würfel- oder, wie man gewöhnlich sagt, Kubikeinheiten, daß der Kör-

Digitized by Google

per n mal so viel Raum einnimmt, als der Würfel, der die Längeneinheit zur Seite hat.

Flüssige Körper, Körner, überhaupt solche Körper, die an und für sich zu klein sind, als daß der Kubikinhalt des einzelnen Stückes ohne große Weitläufigkeit angegeben werden könnte, indem viele Stücke gleichzeitig zur Betrachtung kommen, werden in hohle Räume von bestimmten Dimensionen gebracht und diese angegeben. Häufig haben aber die Hohlmaße selbst wieder eigene Maßeinheiten, wie z. B. Eimer, Maaß, Klafter, Kübel ꝛc., von denen jedoch immer der Inhalt durch Würfeleinheiten bekannt sein muß.

§. 228. Ein Würfel, der eine Seite von a Längeneinheiten hat, enthält a^3 Kubikeinheiten.

Denn die Basis des Würfels hat a a Quadrate, die die Längeneinheit als Seite haben, die Höhe des Würfels hat a Längeneinheiten; denkt man sich sowohl die Höhe in ihre a Theile getheilt und durch die Theilungspunkte zur Basis parallele Ebene gelegt, als auch die Basis in die a^2 Quadrate und durch die Quadratseiten der Basis, parallel zu den Seitenebenen des Würfels, Ebenen gelegt, so erhält man offenbar a^3 Würfel, die die Längeneinheit zur Seite haben; deßhalb hat ein Kubikfuß im Duodezimalmaß $12^3 = 1728$ und im Decimalmaaß $10^3 = 1000$ Kubikzoll u. s. f. Ebenso hat der Kubikmeter 1000 Kubikdecimeter ꝛc.

§. 229. Der Inhalt eines senkrechten Prismas, das zur Höhe h Längeneinheiten und zur Basis f Quadrate (mit derselben Längeneinheit als Seite) hat, beträgt h. f Würfeleinheiten (bezüglich der nämlichen Längeneinheit *).

Beweis ist ganz einfach sowie der vorhergehende zu führen.

Man sagt deßhalb der Inhalt eines senkrechten Prismas ist gleich dem Produkt aus der Höhe in die Grundfläche.

§. 230. Zwei Parallelepipede, die dieselbe Basis und gleiche Höhe haben, haben gleichen körperlichen Inhalt.

a) die beiden Parallelepipede haben zwei Seitenflächen in derselben Ebene liegend. In Fig. 33. haben die beiden

*) Was hier ausdrücklich in Klammern beigefügt ist, setzen wir für die Folge stets voraus.

Digitized by Google

Parallelepipede $ABCDA'B'C'D'$ und $ABCDA''B''C''D''$ dieselbe Grundfläche $ABCD$ und gleiche Höhe, somit sind auch die beiden andern Grundflächen in derselben Ebene; ferner ist vorausgesetzt, daß noch zwei Seitenebenen $ABA'B'$ und $ABA''B''$, somit auch die damit parallelen, in derselben Ebene liegen.

Die Prismen $A'C'A''C''AC$ und $B'D'B''D''BD$ sind congruent, da sie die Grundflächen $AA'A''$ und $BB'B''$ und die Ecken A und B, A' und B', A'' und B'' congruent und die Seitenkanten AC und BD gleich haben. Diese Prismen haben deßhalb auch denselben Inhalt; setzt man nun zu jedem das Prisma $ABCDEF$ und nimmt das Prisma $A''B'C''D'EF$ weg, so erhält man das erstemal das erste Parallelopipedum, das zweitemal das andere, und es müssen demnach die Parallelopipede gleichen Inhalt haben.

b) Haben beide Parallelopipede zwei Seitenflächen nicht in derselben Ebene liegen, wie z. B. das erstgenannte Parallelopipedum $ABCDA'B'C'D'$ und $ABCDA'''B'''C'''D'''$, so läßt sich immer ein drittes $ABCDA''B''C''D''$ denken, das mit jedem der Parallelopipede die in a) geforderten Bedingungen zur Gleichheit erfüllt und somit jedem der beiden gegebenen Parallelopipede gleich ist, woraus die Gleichheit dieser selbst hervorgeht.

§. 231. Zwei Prismen von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind gleich.

Denn wenn die Grundflächen gleich sind, so kann man sie in eine gleiche Anzahl congruenter Quadrate zerlegt denken, führt man durch die Endpunkte derselben zu den Prismenkanten parallele Geraden und denkt sich hiedurch die nöthigen Ebenen gelegt, so enthalten beide Prismen eine gleiche Anzahl von Parallelopipeden, die unter sich dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe haben, also gleich sind, folglich sind die Prismen selbst gleich.

§. 232. Den Inhalt eines schiefen Prismas findet man, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplicirt.

Denn das schiefe Prisma ist dem senkrechten, das gleiche Höhe h und gleiche Grundfläche f mit ihm hat, gleich, von

Digitized by Google

letzterem ist aber nach §. 229. der Inhalt $= fh$, also ist dieser es auch vom gegebenen.

Der Inhalt eines Kreis-Cylinders ist somit gleich $r^2\pi h$, wenn h seine Höhe und r der Radius ist.

§. 233. Um den Inhalt der übrigen Körper nun zu finden, denken wir dieselben durch parallele Ebenen in aufeinanderfolgende Schichten von äußerst geringer Höhe getheilt, dann kann eine jede derselben als prismatisch gedacht werden und man findet deßhalb den Inhalt von ihr, indem man die Schnittfläche mit der sehr kleinen Höhe multiplicirt. Addirt man endlich die Inhalte sämmtlicher Schichten, so erhält man den Inhalt des Körpers. Hat z. B. ein Körper die Höhe h und theilt man dieselbe in n gleiche Theile und legt durch die Theilungspunkte Ebenen senkrecht auf die Höhe, so wird der Körper in n Schichten zerlegt und man hat, wenn der Flächeninhalt dieser mit $s_1, s_2 \ldots\ldots s_n$ bezeichnet sei $(s_1 + s_2 + \ldots . s_n)\frac{h}{n}$ als Inhalt des Körpers, wobei s_1 den Flächeninhalt der ersten Gränzebene bedeutet, die aber, wenn diese ein Punkt oder eine Gerade ist, $=$ Null sein kann.

Diese Art der Bestimmung gibt jedoch nur dann ein richtiges Resultat, wenn man die Höhen der Schichten so klein, als es nur immer nöthig ist, annehmen kann, dann aber wird n unendlich groß, man muß also den Flächeninhalt unendlich vieler Schichten berechnen und dann summiren, was von vornherein wohl als eine Unmöglichkeit erscheint. Bei vielen Körpern kann aber eine Gleichung aufgestellt werden, aus welcher für jede beliebige Höhe die treffende Schnittfläche zu berechnen ist, wodurch dann das Summiren ohne vorhergehende wirkliche Berechnung mit Hülfe der arithmetischen Reihen leicht geht.

Um dieß besser einzusehen, denken wir uns eine Halbkugel, der Centralschnitt sei die Basis und ein darauf senkrechter Radius $OA = OC = r$ die Höhe. Denkt man sich diese Halbkugel in einer beliebigen Höhe $OB = x$ von einer Ebene CC, die zum Centralschnitt parallel ist, geschnitten, so ist $BC^2 = OC^2 - OB^2$, da aber der Schnitt ein Kreis vom Radius BC ist, so ist seine Fläche gleich $BC^2\pi$ oder $s = (r^2 - x^2)\pi$,

Digitized by Google

wo π die Ludolphine ist; denkt man sich nun die Höhe r in n Theile getheilt, so daß also jede Höhe $= \frac{r}{n}$ ist und die Schnittebenen durch die Theilpunkte gelegt, so hat man als erste Schnittfläche $r^2\pi$, als zweite $\left(r^2 - \frac{r^2}{n^2}\right)\pi$, als dritte $\left(r^2 - \frac{4r^2}{n^2}\right)\pi$, als vierte $\left(r^2 - \frac{9r^2}{n^2}\right)\pi$ u. s. f. als nte $\left(r^2 - (n-1)^2\frac{r^2}{n^2}\right)\pi$ und letzte $\left(r^2 - \frac{n^2r^2}{n^2}\right)$, deßhalb ist die Summe aller Schichten gleich

$$\frac{r^2\pi}{n^2}\left\{n^2 + n^2 - 1 + n^2 - 4 + n^2 - 9 \ldots\ldots + n^2 - (n-1)^2 + n^2 - n^2\right\}$$

Aus der Algebra*) ist jedoch bekanntlich für die Summe der Quadrate der aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, also für

---

*) Zuerst folgt aus der Progressionenlehre $1 + 2 + 3 \ldots\ldots + n$
$n = \frac{n(n+1)}{1.2.}$, ferner ist aus der Potenzenlehre

$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
$n^3 = (n+1)^3 + 3(n-1^3)^2 + 3(n+1) + 1,$

hieraus entwickelt sich, wenn man statt n nach und nach $(n-1)$, $(n-2) \ldots\ldots 2$, und 1 setzt

$(n-1)^3 = (n-2)^3 + 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1$
$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$
$3^3 = 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1$
$2^3 = 1^3 + 3.1 + 3.1 + 1$

und durch Addition und gehöriger Reduktion der linken Seite gegen die ersten Glieder der rechten.

$(n+1)^3 = 1 + 3(1^2 + 2^2 \ldots\ldots + n^2) + 3(1 + 2 + \ldots\ldots n) + n,$

hieraus $(n+1)^3 = 1 + 3(1^2 + 2^2 \ldots\ldots + n^2) + \frac{3n(n+1)}{1.2} + n$

Digitized by Google

$1 + 4 + 9 \ldots\ldots + n^2$ der Ausdruck $\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.\ 2.\ 3.}$ gültig,

somit die Summe aller Schichten

$$= \frac{r^2\pi}{n^2}\left(n^2(n+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.\ 3.}\right),$$

somit der Inhalt $r^3\pi\left(\frac{n^2(n+1)}{n^3} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right)$

oder weil n unendlich groß ist $= r^3\pi\left\{1 - \frac{2}{6}\right\}$, also ist

der Inhalt $= \frac{2}{3}r^3\pi$ und der der ganzen $= \frac{4}{3}r^3\pi$. Von der Wahrheit dieses Resultats werden wir uns übrigens bezüglich der Kugel auch auf andern Wegen überzeugen.

§. 234. Ist bei einem Körper die Fläche einer in der Höhe x genommenen Schicht $s = a + bx + cx^2$, wo a, b und c bekannte Größen bedeuten und theilweise auch der Null gleich sein können, so ist der körperliche Inhalt $= ah + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3}$, wo h die ganze Höhe des betrachteten Körpers ist. Denn es ist

$$s_1 = a, \text{ da hier } x = o,$$

$$s_2 = a + \frac{bh}{n} + c\left(\frac{h}{n}\right)^2, \text{ da hier } x = \frac{h}{n},$$

$$s_3 = a + \frac{2bh}{n} + 4c\left(\frac{h}{n}\right)^2, \text{ da hier } x = \frac{2h}{n},$$

oder $(n+1)^3 - n - 1 - \frac{3n^2}{2} - \frac{3n}{2} = 3(1^2 + 2^2 + \ldots n^2)$ oder

$\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = 3(1^2 + 2^2 + \ldots\ldots n^2)$, woraus leicht der obige Satz folgt.

Digitized by Google

$s_n = a + (n-1)\frac{bh}{n} + (n-1)^2 c \left(\frac{h}{n}\right)^2$; da hier

$$x = \frac{(n-1)h}{n}.$$

Also die Summe aller Schichten $= na + \frac{bh}{n}(1 + 2 + n$

$..... + (n-1)) + \frac{ch^2}{n^2}(1 + 2^2 + \ldots (n-1)^2)$,

oder $= na + \frac{n(n-1)}{1.\,2.\,n.}bh + \frac{n(n-1)(2n-1)}{1.\,2.\,3.\,n^2}ch^2$

und der körperliche Inhalt $= ah + \frac{n(n-1)}{2.\,n.\,n.}bh^2$

$$+ \frac{n(n-1)(2n-1)}{1.\,2.\,3.\,n^3}ch^3$$

oder wegen der unendlichen Größe von n

$$= ah + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3}, \text{ q. e. d.}$$

§. 235 Wenn ein Körper die im vorigen §. angeführte Eigenschaft besitzt, so findet man seinen körperlichen Inhalt auch mit der Formel $i = \frac{h(G + g + 4g')}{6}$, wo G und g die parallelen Grundflächen und g′ die zu ihm gleichlaufende Schnittfläche in der Mitte des betrachteten Körpers bedeutet.

Denn ist für die Höhe x der Schnitt $= a + bx + cx^2$, und setzt man hierin

$x = o$, so ist $G = a$,

$x = h$, so ist $g = a + bh + ch^2$,

$x = \frac{h}{2}$, so ist $g' = a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4}$,

dann aber ist $\frac{h(G + g + 4g')}{6} = \frac{h(6a + 3bh + 2ch}{6}$

$= ah + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3}$ oder nach §. 234. $= i$.

Digitized by Google

Diese Formel hat vor der des vorhergehenden Paragraphen das voraus, daß sie der Größen a, b und c nicht benöthigt ist.

Um sie anzuwenden, bedarf man nur die Versicherung, daß der Körper die im vorigen §. angeführten Bedingungen erfüllt, d. h. daß die Fläche eines in der Höhe x auf dieser senkrecht genommenen Schnitts durch einen Ausdruck (Funktion) bestimmt ist, in welchem x selbst nur in den Potenzen 0, 1 oder 2 vorkommt und diese untereinander mit anderweitigen von der Höhe x unabhängigen Größen durch eine der arithmetischen Grundoperationen verbunden sind.

§. 236. Der körperliche Inhalt eines Obelisken kann auf die in §. 235. angegebene Weise gefunden werden, da der Obelisk die hiezu nöthige Bedingung erfüllt, wenigstens dann, wann zwischen den beiden Grundebenen keine Seitenkanten sich schneiden. Hiezu muß bewiesen werden, daß der Schnitt in der Höhe x durch die Formel $a + bx + cx^2$, wo a, b und c von x unabhängige Größen sind, bestimmt ist, für den Fall wenigstens, daß sich keine Seitenkanten zwischen den beiden Grundebenen schneiden.

Denn heißt man die Seiten des Vielecks der Schnittfläche $c_1\ c_2\ c_3 \ldots c_n$, so ist sein doppelter Inhalt nach der Trigonometrie*) $= c_1\ c_2\ \text{Sin}\ \varphi_1 - c_1\ c_3\ \text{Sin}\ (\varphi_1 + \varphi_2) + c_2\ c_3\ \text{Sin}\ (\varphi_2) + c_1\ c_4\ \text{Sin}\ (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - c_2\ c_4\ \text{Sin}\ (\varphi_2 + \varphi_3) + c_3\ c_4\ \text{Sin}\ \varphi_3 - \ldots + (-1)^{n-1}$ $(c_1\ c_{n-1}\ \text{Sin}\ (\varphi_1 + \varphi_2 \ldots \varphi_{n-2}) - c_2\ c_{n-1}\ \text{Sin}\ (\varphi_2 + \varphi_3 \ldots - \varphi_{n-2}) + c_3\ c_{n-1}\ \text{Sin}\ (\varphi_3 + \varphi_4 \ldots \varphi_{n-2}) \ldots (-1)^{n-1}$ $c_{n-2}\ c_{n-1}\ \text{Sin}\ \varphi_{n-2})$, hiebei ist φ_1 der Vieleckswinkel zwischen c_1 und c_2, φ_2 der zwischen c_2 und c_3 u. s. f.

Diese Winkel sind aber offenbar dieselben, man mag den Schnitt wo immer nehmen, weil die Schnittebenen unter sich parallel sind, deßhalb sind die goniometrischen Funktionen des für den Inhalt von einem Obelisken-Parallelschnitt gefundenen Ausdrucks unabhängig von der Höhe, in welcher der Schnitt angenommen ist.

---

*) Man sehe hierüber mein Handbuch der Trigonometrie. Fürth 1851, Seite 205. u. f.

Digitized by Google

Die Seiten c aber stehen zu den Vielecksseiten der Basen und der Schnitthöhe in bestimmter Beziehung. Ist nämlich die Seitenebene, in welcher ein c vorkommt, ein Parallelogramm, so ist $c = a = b$, das heißt den entsprechenden Basisseiten gleich; ist die Seitenfläche ein Dreieck, das in einer der Basen seine Spitze hat, oder ist sie ein Trapez, immerhin wird, wie leicht aus der Planimetrie und mit Hülfe von §. 97. hervorgeht, $c = m + px$, wo m und p blos von den parallelen Seiten b und a abhängen und für alle Schnitte dieselben bleiben, somit ist das Produkt zweier c ein Ausdruck der Form $m + px + qx^2$, also hat auch, nach der oben angegebenen Formel, der Ausdruck für die Fläche des Schnittes diese Form, was bewiesen werden sollte.

§. 237. Der Inhalt einer Pyramide $= \frac{bh}{3}$, wo b die Grundebene der Pyramide und h die Höhe ist.

Denn nach §. 236. ist für einen Obelisken $i = \frac{h(G + g + 4g')}{6}$

bei uns ist nun $G = b$, $g = o$ und $g' : b = \frac{h^2}{4} : h^2$

nach §. 182., also $g' = \frac{b}{4}$, somit $i = \frac{hb}{3}$.

Anmerkung 1. Der Inhalt eines Kreiskonus also $= \frac{r^2 \pi h}{3}$.

Anmerkung 2. Aehnliche Pyramiden verhalten sich wie die Kuben ihrer Höhen.

Denn in ähnlichen Pyramiden verhalten sich die Basen wie die Quadrate der Höhen oder es ist $B : b = H^2 : h^2$; es ist $J : i = \frac{HB}{3} : \frac{hb}{3}$, also $= H^3 : h^3$.

Anmerkung 3. In ähnlichen Kegeln ist auch $R^2\pi : r^2\pi = H^2 : h^2$. Aber ihre Inhalte verhalten sich $J : i = R^2h : r^2h = R^3 : r^3 = H^3 : h^3$, d. h. wie die Kuben der Radien oder wie die Kuben der Höhen.

Digitized by Google

§. 238. Der Inhalt eines Pyramidenstumpfes ist $= \frac{(B+b+\sqrt{Bb})h}{3}$, wo B und b die Basen sind und h ihre Entfernung.

Denn es ist $G = B$ und $g = b$; g' aber findet sich auf folgende Weise. Ist m die Entfernung der Basis b von der Spitze, so ist g' um $m + \frac{h}{2}$ und B um $m + h$ davon entfernt. Wir haben $\sqrt{g'} : \sqrt{b} = m + \frac{h}{2} : m$ und

$\sqrt{g'} : \sqrt{B} = m + \frac{h}{2} : m + h$; hieraus ferner

$$1 : \sqrt{\frac{b}{B}} = 1 : \frac{m}{m+h}, \text{ oder}$$

$m\sqrt{b} + h\sqrt{b} = m\sqrt{B}$, oder $m = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}$, ferner ist

$$\sqrt{g'} = \left(\frac{m+\frac{h}{2}}{m}\right)\sqrt{b} = \left(1+\frac{h}{2m}\right)\sqrt{b}$$

$$= \left(1+\frac{h(\sqrt{B}-\sqrt{b})}{2h\sqrt{b}}\right)\sqrt{b}, \text{ also auch}$$

$$\sqrt{g'} = \frac{\sqrt{B}+\sqrt{b}}{2} \text{ und } g' = \frac{B+2\sqrt{Bb}+b}{4},$$

somit ist $i = \frac{(B+\sqrt{Bb}+b)}{3}h.$

So z. B. von einem abgestumpften Kegel

$$i = \frac{(R^2+Rr+r^2)}{3}\pi h.$$

Digitized by Google

§. 239. Den Inhalt eines Pontons oder Kastens zu finden, d. h. eines Obelisken, dessen Basen zwei Rechtecke und dessen Seitenflächen Trapeze sind.

Sind a und b die Seiten der größeren Basis, a′ und b′ die der kleineren, so ist $G = ab$, $g = a'b'$ und weil leicht einzusehen ist, daß die Seite des Rechteckes vom mittleren Schnitt $\frac{a + a'}{2}$ und $\frac{b + b'}{2}$, so ist dieses Rechteck $g' = \left(\frac{a+a'}{2}\right)\left(\frac{b+b'}{2}\right)$,

somit der Inhalt des Körpers nach §. 236.

$$i = \frac{h\left[ab + a'b' + (a+a')(b+b')\right]}{6}.$$

§. 240. Einen Pyramidalstumpf durch einen zu den Basen parallelen Schnitt in zwei Theile zu zerlegen, die sich wie m : n verhalten.

Es sei **B** die große Basis, b die kleine, h ihre Entfernung von einander, ferner sei x die gesuchte Entfernung des parallelen Schnitts von der kleinern Basis. Ferner sei die kleine Basis um a von der Spitze der ergänzenden Pyramide entfernt, so ist

$$a : a + h = \sqrt{b} : \sqrt{B} \text{ oder } 1)\ a = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}.$$

Ist der Inhalt des ganzen Stumpfs = i, der des an der kleinern Basis liegenden Theils = i′, des andern i″ und der Inhalt der Ergänzungspyramide = i‴, so hat man

$$2)\ i''' = \frac{hb\sqrt{b}}{3(\sqrt{B} - \sqrt{b})}.$$ Ferner $i' : i'' = m : n$, also

$$i'' = \frac{n}{m} i' \text{ und}$$

$$3)\ i = i' + i'' = \frac{(m+n)}{m} i' = \frac{(B + \sqrt{Bb} + b)\, h}{3}$$

also ist $4)\ i' = \frac{mh\,(B + \sqrt{Bb} + b)}{3\,(m+n)}$.

Digitized by Google

Nun ist $(a+x)^3 : (a+h)^3 = i''' + i' : i''' + i$, also

$$(a+x) = \sqrt[3]{\frac{i''' + i'}{i''' + i}}\,(a+h) \text{ und}$$

$$x = (a+h)\sqrt[3]{\frac{i''' + i'}{i''' + i}} - a, \text{ wobei } a, i''', i \text{ und } i' \text{ nach } 1),$$

2), 3) und 4) zu berechnen sind.

Anmerkung 1. Man kann für einen abgestumpften Kegel diese Aufgabe auch kurz so lösen:

Der kleinere Radius sei r, der größere R, der obere Theil soll sich zum unteren wie m : n verhalten, oder

1) $i' : i - i' = m : n$, ferner

2) $i''' : i''' + i' = r^3 : y^3$, wo y den Radius der Schnittfläche bedeute. Also auch

3) $i''' + i' : i' = y^3 : y^3 - r^3$, ferner

4) $i''' + i' : i''' + i = y^3 : R^3$, also

5) $i''' + i' : i - i' = y^3 : R^3 - y^3$.

Substituirt man in 5) für $i - i'$ aus 1), für $i''' + i$ aus 3) die gehörigen Werthe, so erhält man

$$\frac{i'\,y^3}{y^3 - r^3} : \frac{n\,i'}{m} = y^3 : R^3 - y^3,$$

d. h. $y = \sqrt[3]{\frac{m\,R^3 + n\,r^3}{m+n}}$. Endlich ist

$x : h = y - r : R - r$; hieraus ist auch

$$x = \frac{h}{R-r}\left(\sqrt[3]{\frac{m\,R^3 + n\,r^3}{m+n}} - r\right).$$

Leicht ist ferner ersichtlich, daß diese Entwicklung auch für beliebige Pyramiden gilt. Dann aber ist:

$$x = \frac{h}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}\left\{\sqrt[3]{\frac{m\sqrt[2]{B^3} + n\sqrt[2]{b^3}}{m+n}} - \sqrt[2]{b}\right\}$$

Digitized by Google

Anmerk. 2. Will man eine ganze Pyramide durch eine Ebene in zwei Theile theilen, die sich wie m : n verhalten, so hat man blos b = o zu setzen, dann ist

$$x = \frac{h}{\sqrt{B}} \left\{ \sqrt[3]{\frac{m \sqrt[3]{B^3}}{m+n}} \right\} = h \sqrt[3]{\left(\frac{m}{m+n}\right)}$$

§. 241. Von einem Kugelstück, das durch zwei parallele Ebenen abgegrenzt ist, den körperlichen Inhalt zu finden.

Praktisch wird es, da die Kugel den Bedingungen des §. 235. entspricht, am einfachsten sein, den Umfang des untern, mittlern und oberen Parallelkreises, sowie die Höhe zu messen, aus diesen nach der planimetrischen Formel $f = r^2 \pi = \frac{u^2}{4\pi}$ die gehörigen Schnittflächen zu berechnen und dann nach §. 235. den Inhalt zu suchen. Es ist dann $i = \frac{h}{24\pi}(U^2 + u^2 + 4u'^2)$.

Uebrigens läßt sich aus dem Kugel-Radius R, der Höhe der Zone h und der Entfernung a des größern Grundkreises vom Mittelpunkt eine andere Formel auf folgende Weise finden.

Der Radius r des größern Kreises findet sich aus der Gleichung $r^2 = R^2 - a^2$, der Radius des mittleren r' aus der Gleichung $r'^2 = R^2 - \left(a + \frac{h}{2}\right)^2$, der des kleinern r'' aus der Gleichung $r''^2 = R^2 - (a + h)^2$,

somit $i = \frac{h\pi}{6}(R^2 - a^2 + R^2 - a^2 - 2ah - h^2 + 4R^2$

$$- 4a^2 - 4ah - h^2) =$$

$$\frac{h\pi}{6}(6R^2 - 6a^2 - 6ah - 2h^2) =$$

$$h\pi\left(R^2 - a^2 - ah - \frac{h^2}{3}\right).$$

welche Formel auch so oft dargestellt wird:

Digitized by Google

$R^2 - a^2 = r^2$, $R^2 - a^2 - R^2 + (a+h)^2 = r^2 - r''^2 =$
$2ah + h^2$; also $-2ah = h^2 - r^2 + r''^2$ und

$$R^2 - a^2 - ah = r^2 + \frac{r''^2 - r^2 + h^2}{2} = \frac{r^2}{2} + \frac{r''^2}{2} + \frac{h^2}{2},$$

somit $i = \frac{1}{2}\left[h\pi(r^2 + r''^2) + \frac{h^3\pi}{3}\right]$, d. h. in Worten:

der Inhalt einer Kugelzone ist gleich der halben Summe aus zwei Cylindern, deren Höhen die Höhe der Zone und deren Grundflächen die der Zone sind und einer Kugel, deren Radius gleich der halben Höhe ist.

§. 242. Den Inhalt einer Kugelhaube von der Höhe h findet man, wenn man in die Formel des vorigen §. $u = o$, dann ist $i = \frac{h}{24\pi}(u^2 + 4u'^2\pi)$ wo u den größern und u' den mittleren Umfang bedeutet, oder $r'' = o$, dann ist $i = \frac{h\pi r^2}{2} + \frac{h^3\pi}{6}$, wo r den Radius des untern Kreises bedeutet, oder man setzt $a = R - h$, dann ist

$$i = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h).$$

§. 243. Der Inhalt eines Kugelausschnittes wird gefunden, wenn man zu dem Inhalt der Kugelhaube noch den Inhalt des auf der Basis derselben stehenden Konus addirt. Der Konus hat $R - h$ zur Höhe und r zur Basis, somit ist sein Inhalt $\frac{r^2\pi(R-h)}{3}$; nun ist aber $r^2 = R^2 - (R-h)^2 =$ $2Rh - h^2$, also sein Inhalt $= \frac{(2Rh - h^2)\pi(R-h)}{3}$,

somit der Inhalt des Kugelausschnittes selbst nach gehöriger Reduction:

$$\pi\left(\frac{3h^2R}{3} - \frac{h^3}{3} + \frac{2R^2h}{3} - \frac{3Rh^2}{3} + \frac{h^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi hR^2.$$

Digitized by Google

Dieses Resultat findet man jedoch leichter auf folgende Weise:

Man denkt sich die Fläche der Haube in lauter unendlich kleine und deßhalb ebene Flächen (Facetten) getheilt, und von jedem Endpunkte derselben zum Kugelcentrum Radien gezogen, so erhält man ebenso viele Kegel, deren Höhe alle $= R$ ist. Sämmtliche Kegel machen zusammen den Kugelausschnitt, dessen Inhalt aber $= \frac{R}{3}\{g_1 + g_2 + \ldots . g_n\}$ ist,

wo die g jedesmal die Facettenfläche des Kegels bedeutet. Sämmtliche Facetten haben aber als Gesammtfläche die der Kugelhaube, also ist nach §. 226 $g_1 + g_2 + \ldots . g_n = 2\,R\pi h$, somit ist der Inhalt selbst $= \frac{2\,R^2\pi h}{3}$, wie oben. Da ferner die Halbkugel zur Höhe den Kugelradius hat, so ist der Inhalt der Halbkugel $= \frac{2\,R^3\pi}{3}$, wie wir schon aus §. 233 wissen.

§. 244. Der Inhalt einer Kugel läßt sich übrigens auch noch auf folgende Weise finden, sobald man nämlich den eines Cylinders und den eines Kegels zu berechnen weiß.

Denkt man sich eine Halbkugel und auf deren Centralschnitt als Basis einen Cylinder und einen Konus von gleicher Höhe mit der Halbkugel, letzteren jedoch so gestellt, daß sich die Spitze im Centrum befindet, so daß in Fig. 34 **AOBE** die Halbkugel, **ABCD** den Cylinder, und **OCDE** den Kegel im Durchschnitt vorstellt. Es sei ferner eine zur Halbkugelbasis parallele Ebene **FJ** so gelegt, daß sie den Cylinder in einen Kreis, dessen Radius $=$ **FI**, die Kugel in einem Kreis, dessen Radius aus **GI** und den Konus in einem Kreis, dessen Radius $=$ **HI** ist, schneidet, dann ist der Cylinderschnitt $= FI^2\pi$, der Kugelschnitt $= GI^2\pi$ und der Kegelschnitt $= HI^2\pi$.

Zieht man noch **OG**, so ist $OG^2 = GI^2 + OI^2 = FI^2$ und weil **OI : OE = HI : CE**, aber **CE = OE**, so ist **OI = HI**, man hat demnach $FI^2 = GI^2 + HI^2$, oder $FI^2\pi = GI^2\pi + HI^2\pi$, d. h. der Cylinderschnitt ist so groß, als

Digitized by Google

die Summe des Kugel- und Kegelschnittes zusammengenommen. Denkt man sich nun die drei Körper in lauter parallelen Schichten von äußerst geringer Höhe, so daß dieselben als prismatisch angesehen werden können, getheilt, so ist, weil eine Cylinderschicht gleich den zwei entsprechenden Schichten der Kugel und des Kegels zusammengenommen ist, der Cylinder so groß als die Halbkugel und der Konus zusammen genommen. Da nun der Inhalt des Cylinders $= R^3\pi$, der des Kegels $= \frac{R^3\pi}{3}$ ist, so ist der der Halbkugel $= \frac{2}{3} R^3\pi$, wie schon bekannt.

Hieraus folgt ferner:

1) Kegel, Kugel und Cylinder verhalten sich wie 1 : 2 : 3, wenn Kegel und Cylinder als Höhe und Basisradius den Radius der Kugel haben.
2) Wenn eine Halbkugel in einen cylindrischen Raum gepaßt ist, so ist der von ihr leergelassene Raum so groß, als ein Konus, der in den Cylinder paßt.

§. 245. Den Inhalt eines kuppelförmigen Körpers zu finden, dessen Basis ein regelmäßiges Vieleck ist und dessen parallele Schnitte regelmäßige Vielecke in den Parallelkreisen einer Halbkugel vom Radius R sind.

Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vielecks von n Seiten ist bekanntlich *) $\frac{n r^2 \operatorname{Sin}\varphi}{2}$, wo r den Radius des umschriebenen Kreises und φ den Polygonalwinkel bedeutet; letzterer ist für alle Schnitte der nämliche, r aber findet sich für die Höhe x durch

$$r^2 = R^2 - x^2,$$

folglich kann der Inhalt der Kuppel nach §. 235 gesucht werden.

Für die ganze Kuppel ist $G = \frac{nR^2 \operatorname{Sin}\varphi}{2}$; $g = o$;

*) Handbuch der Trigonometrie S. 202.

Digitized by Google

$g' = \frac{3\,nR^2 \sin\varphi}{8}$, $h = R$ also $i = \frac{nR^2 \sin\varphi}{3}$. R oder $= \frac{2\,GR}{3}$, wo G die untere Grundfläche bedeutet.

§. 246. Der Inhalt einer Rotationsparaboloides zu finden.

Das Rotationsparaboloid ist ein Körper, der entsteht, wenn sich eine Parabel um ihre Are dreht. Die Basis eines solchen Körpers liegt in einer zur Are senkrechten Ebene und ist ein Kreis.

Die zur Basis parallelen Schnitte sind Kreise, deren Radien r durch die Formel gefunden werden: $r^2 = px$, und haben somit zum Flächeninhalt $r^2\pi = \pi px$, wo p eine beständige Zahl (Parameter der Parabel) und x die Entfernung des Schnitts vom Scheitel ist; also kann der Körper nach §. 235 betrachtet werden und hat, weil $g = o$, $g' = \frac{ph}{2}$ und $g = \pi ph$ ist, zum Ausdruck:

$$i = \frac{h}{6}\left\{\pi ph + \frac{4\pi ph}{2}\right\} = \frac{\pi ph^2}{2} = \frac{gh}{2};$$

d. h. ein solcher Körper, der auch Kreiskonoid heißt, beträgt die Hälfte eines gleich hohen Cylinders von derselben Basis. — Ebenso gilt die Formel auch für einen paraboliſchen kuppelförmigen Körper.

§. 247. Den Inhalt eines Rotationskörpers zu finden, welcher entsteht, wenn sich eine Kurve um eine Are dreht, sobald die Kurve die Beschaffenheit hat, daß die kreisförmigen Parallelschnitte, die im §. 234 ausgesprochenen Bedingungen erfüllen. Man bestimmt den Flächeninhalt der beiden Basen und des mittleren Durchschnitts und berechnet dann den Inhalt mittelst der Formel $i = \frac{h\,(G + g + 4g')}{6}$.

Eine Anwendung dieses § findet man bei der Berechnung

Digitized by Google

des Inhalts der Fässer. Vorausgesetzt nämlich, daß die Faßdauben nach einer Kurve gekrümmt sind, die den Bedingungen Genüge leistet *), hat man, wenn r den Radius der beiden Böden und R den Radius in der Mitte bei dem Spundloch bedeutet:

$$i = \frac{h\,(2\,r^2 + 4R^2)\,\pi}{6} = \frac{h\,\pi\,(2\,R^2 + r^2)}{3}.$$

§. 248. Oft ist übrigens auch von Körpern dann der Inhalt zu finden, wann er, sei es wegen Mangel an einer bekannten nach geometrischen Gesetzen bestimmten Gestalt, sei es aus andern Gründen durch geometrische Sätze nicht zu berechnen ist, in welchem Falle die Physik mit der Hydrostatik aushilft. Ueberhaupt sind einige Sätze dieser Wissenschaft so innig mit dem eben abgehandelten Kapitel verbunden, daß wir sie in der Kürze hier erwähnen zu müssen glauben.

1) Ein Körper verliert in Wasser (oder einer andern Flüssigkeit) soviel von seinem Gewicht als das Wasser (oder die andere Flüssigkeit) wiegt, die er von seinem Platz verdrängt. Der Körper verdrängt aber offenbar ein Wasservolumen, das dem seinigen gleich kömmt; hieraus folgt nachstehende Regel: Man wiegt einen Körper zuerst in der Luft, hierauf (mittelst einer hydrostatischen Wage) im Wasser und bestimmt aus der Differenz beider Gewichte den Gewichtsverlust im Wasser = v, dieß ist alsdann das Gewicht eines Wasserkörpers der gleichen Inhalt i mit dem Körper hat. Nun ist aber aus sorgfältigen Versuchen ein für allemal bekannt wie schwer die Kubik-Einheit Wasser wiegt, z. B. der Kubikfuß Wasser wiegt (im dichtesten Zustand)

Bayr. = 44,39481 bayr. Pfd. (Ein Duodez-Kubikzoll = 0,02569 Pfd.)

Oesterreich. = 56,49545 östreich. Pfd.

---

*) Wenn auch diese Voraussetzung in der That selten genau erfüllt ist, so kann sie es doch wenigstens annähernd sein und unsre Formel als Näherungsformel gelten.

Digitized by Google

Preußisch = 66 preußische Pfd.
Würtemberg. = 50,2732 würtembergische Pfd.
Pariser = 70,0242 altfrz. Pfd.

1 Kubikdecimeter = 1 Liter wiegt 1000 Gramm.

Heißt man das Gewicht der Kubikeinheit Wasser = w, so hat man offenbar $i \cdot w = v$ oder $i = \frac{v}{w}$ d. h. man findet den Inhalt eines Körpers, wenn man seinen Gewichtsverlust im Wasser kennt und denselben durch das bekannte Gewicht der Kubikeinheit Wasser dividirt.

Uebrigens sei hier ein für allemal bemerkt, daß in allen Formeln, in welchen w vorkömmt, sämmtliche Längen- oder Flächenmaaße auf die Längeneinheit, die der genannten Kubikeinheit zu Grunde liegt, sowie sämmtliche Gewichtsangaben auf die bei w genommene Gewichtseinheit zu beziehen sind. Ist z. B. w das Gewicht eines bayr. Kubikfuß Wasser in bayr. Pfunden angegeben, also w = 44,39 angenommen, so müssen alle gegebenen Längen in bayr. Fußen, alle Flächen in bayr. Quadratfußen ꝛc., alle Gewichte in bayr. Pfd. ausgedrückt (unter Umständen also zuerst hierauf reducirt werden) und alle berechneten Resultate haben natürlich die genannten Bedeutungen.

Ist ein Körper leichter als Wasser, so hängt man einen schwerern Körper an und bestimmt den Gewichtsverlust der ganzen Körperverbindung und daraus den Gesammtinhalt, von welchem dann der Inhalt des schwereren Körpers abgezogen wird, um den des gegebenen zu erhalten.

2) Unter der Bezeichnung specifisches Gewicht versteht man eine Zahl s, welche anzeigt, wie vielmal ein Körper schwerer ist, als ein gleich großes Stück Wasser. Leicht ist nun einzusehen: Das Gewicht eines Körpers findet man, wenn man das Gewicht eines gleich großen Stück Wassers multiplicirt mit dem spec. Gewicht, das die Materie hat, aus welcher der Körper besteht, oder ist g

Digitized by Google

das Gewicht des Körpers, i sein Inhalt, s sein specifisches Gewicht und w das Gewicht der Kubikeinheit Wasser, so ist $g = iws$ und auch $i = \frac{g}{ws}$.

Wir setzen hier das specifische Gewicht einiger häufig vorkommenden Körper her:

Baustein	= 2,5;	Gußeisen	= 7,2;	Messing	= 8,2;
Blei	= 11,4;	Schmiedeisen	= 7,8;	Silber	= 10,4;
Eis	= 0,94;	Gold	= 19,3;	Steinkohlen	= 1,4;
Eichenholz	= 0,7;	Kupfer	= 8,8;	Tannenholz	= 0,5;
Oel	= 0,92;	Queckſilber	= 13,6;	Seewaſſer	= 1,03.

§. 249. Bei Körpern, deren Inhalt in Hohlmaaßen bestimmt ward, ist es oft nöthig die Beziehung der Hohlmaaßeinheit auf die Kubikeinheit zu wissen, deßhalb geben wir hier einige derartige Beziehungen an:

1 bayr. Maaß = 0,043 bayr. Kubikfuß = 1,069 Liter,
1 bayr. Scheffel = 208 Maaß,
1 österreich. Maaß = 0,04484 östr. Kubikfuß = 1,415 „
1 preuß. Quart = 0,037 preuß. Kubikfuß (64 Kubikzoll) = 1,145 Liter,
1 Liter = 1 Kubikdecimeter;

ferner ist

1 bayr. Fuß = 291,8592 Millimeter, 1 bayr. Pfd. = 560 Gramm,
1 pariſ. Fuß = 324,8394 Millimeter, 1 franz. Pfd. = 500 Gramm,
1 österreich. Fuß = 316,111 Millimeter, 1 österr. Pfd. = 560,014 Gramm,
1 preuß. Fuß = 313,8535 Millimeter, 1 preuß. Pfd. = 467,711 Gramm.

Kapitel VI.

Specielle Beispiele über Inhaltsberechnungen.

§. 250. Vom Würfel.

Sei die Seite = a, so ist sein Inhalt nach §. 228

1) $i = a^3$; 2) $a = \sqrt[3]{i}$; 3) $a = \sqrt[3]{\frac{v}{w}}$; 4) $g = a^3sw$; 5) $a = \sqrt[3]{\frac{g}{sw}}$; Nennt man die Oberfläche o, so ist

6) $o = 6a^2$; 7) $a = \sqrt{\frac{o}{6}}$; 8) $i = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{o^3}{6}}$; 9) $o = 6\sqrt[3]{i^2}$; 10) $o = 6\sqrt[3]{\frac{v^2}{w^2}}$; 11) $g = \frac{sw}{6}\sqrt{\frac{o^3}{6}}$;

12) $o = 6\sqrt[3]{\frac{g^2}{s^2w^2}}$.

Die in diesen Formeln liegenden Aufgaben sind leicht in Worte zu kleiden, wie z. B.:

1) Den Inhalt eines Würfels zu finden, wenn seine Seite = a ist,

3) Die Seite eines Würfels zu finden, wenn derselbe in Wasser v Gewichtseinheiten Verlust hat, und das Gewicht der Kubikeinheit Wasser = w ist,

12) Die Oberfläche eines Würfels zu finden, der g Gewichtseinheiten wiegt, dessen Materie ein specifisches Gewicht = s hat und dabei die Kubikeinheit Wasser = w anzunehmen ist.

Angaben zu speciellen Beispielen (120). —

a =	3	2	15,2	11	0,1
i =	27	8	3511,808	1331	0,001
o =	54	24	1386,24	726	0,06
w =	44,39	56,41	56,41	56,41	44,39
s =	7,2	0,7	1,03	13,6	8,2
g =	8629,416	315,896	204138,12	1021111,26	0,363698
v =	1198,53	451,28	198101,09	75081,71	0,04439

Digitized by Google

$a = {}^{5}/_{12}$	$^{1}/_{12}$	20	1,3	0,7
$i = \frac{125}{1728}$	$\frac{1}{1728}$	8000	2,197	0,343
$o = \frac{25}{24}$	$\frac{1}{24}$	2400	10,14	2,94
w = 44,39	44,39	66	66	1000
s = 11,4	10,4	1,4	7,8	19,3
g = 36,606426	0,26716	739200	1131,016	6619,9
v = 3,21109	0,025688	528000	145,002	343

§. 251. Ein senkrechtes Prisma, dessen Basis ein Rechteck ist, habe als Basisseiten a und b, als Höhe h, folglich ist 1) sein Inhalt $i = abh$; 2) $a = \frac{i}{bh}$; 3) $h = \frac{i}{ab}$; 4) seine Mantel (Gesammtseitenflächen) $m = 2h(a + b)$; 5) $a = \frac{m - 2bh}{2h}$; 6) $h = \frac{m}{2(a + b)}$; 7) $v = abhw$; 8) $a = \frac{v}{bhw}$; 9) $h = \frac{v}{abw}$; 10) $g = abhsw$; 11) $a = \frac{g}{bhsw}$; 12) $h = \frac{g}{absw}$; 13) $m = \frac{2i(a + b)}{ab}$; 14) $m = \frac{2(a + b)v}{abw}$; 15) $m = \frac{2(a + b)g}{sw}$.

Diese Aufgaben sind leicht in Worte zu kleiden, specielle Beispiele hierüber sind: (150)

Digitized by Google

=	1	1	1	2	$\frac{5}{12}$
b =	2	2	1,4	3	$\frac{7}{12}$
h =	3	3	10	4,5	1
i =	6	6	14	27	0,24306
m =	18	18	48	45	2
w =	44,39	44,39	44,39	44,39	56,41
s =	0,94	0,7	0,5	7,2	11,4
g =	250,26	186,438	310,730	8629,416	156,30556
v =	266,34	266,34	621,46	1198,53	13,71102

a =	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	0,1	0,7	1,1
b =	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$	0,23	0,9	2,4
h =	$\frac{3}{12}$	2	2,14	4,32	5
i =	$\frac{1}{1152}$	$\frac{5}{288}$	0,0492	1,3482	13,20
m =	$\frac{1}{16}$	1	1,4124	6,848	35
w =	56,41	66	66	1000	1000
s =	11,3	19,3	10,4	13,6	7,8
g =	0,5526	22,114	33,7849	37013,8	102960
v =	0,0489	$1\frac{7}{48}$	3,24852	2721,6	13200

§. 252. Ein beliebiges Prisma habe als Grundfläche f, als Höhe h, folglich ist 1) sein Inhalt $i = fh$; 2) $f = \frac{i}{h}$; 3) $h = \frac{i}{f}$; 4) $g = fh\,sw$; 5) $f =$

$\frac{g}{hsw}$; 6) $h = \frac{g}{fsw}$; 7) $v = fhw$; 8) $f = \frac{v}{hw}$

9) $h = \frac{v}{fw}$.

Specielle Beispiele hierüber sind: (90)

f =	2	1	1,2	20	$\frac{11}{144}$
h =	5	3	0,3	4	$\frac{7}{12}$
i =	10	3	0,36	80	$\frac{77}{1728}$
w =	44,39	44,39	44,39	44,39	66
s =	0,5	7,2	8,2	0,5	1,03
g =	221,95	958,824	131,039	1775,6	2,909
v =	443,9	133,17	15,981	3551,2	2,9

f =	$\frac{1}{144}$	$\frac{200}{144}$	0,56	2,24	0,01
h =	$\frac{1}{12}$	$\frac{40}{12}$	0,8	6,3	0,1
i =	$\frac{1}{1728}$	$\frac{8000}{1728}$	0,448	14,112	0,001
w =	66	66	56,41	56,41	1000
s =	19,3	1,4	13,6	8,7	10,4
g =	0,737	427,81	343,695	6925,703	10,4
v =	0,038	305,56	25,272	796,058	1

§. 253. Von einem senkrechten Kreiscylinder sei der Radius der Basis = r, seine Höhe = h, folglich ist: 1) sein Inhalt $i = r^2\pi h$; 2) $h = \frac{i}{r^2\pi}$; 3) r =

Digitized by Google

$\sqrt{\frac{i}{\pi h}}$; 4) seine Mantelfläche $m = 2r\pi h$; 5) $h = \frac{m}{2r\pi}$;

6) $r = \frac{m}{2\pi h}$; 7) $i = \frac{m^2}{4\pi h}$; 8) $h = \frac{m^2}{4\pi i}$; 9) $m = 2\sqrt{\pi h i}$; 10) $i = \frac{mr}{2}$; 11) $m = \frac{2i}{r}$; 12) $r = \frac{2i}{m}$; 13) $v = r^2\pi hw$; 14) $h = \frac{v}{r^2\pi w}$; 15) $r = \sqrt{\frac{v}{\pi hw}}$;

16) $v = \frac{rmw}{2}$; 17) $m = \frac{2v}{rw}$; 18) $r = \frac{2v}{mw}$;

19) $v = \frac{m^2w}{4\pi h}$; 20) $h = \frac{m^2w}{4\pi v}$; 21) $m = 2\sqrt{\frac{\pi hv}{w}}$;

22) $g = swr^2\pi h$; 23) $h = \frac{g}{swr^2\pi}$; 24) $r = \sqrt{\frac{g}{sw\pi h}}$;

25) $g = \frac{swrm}{2}$; 26) $m = \frac{2g}{swr}$; 27) $r = \frac{2g}{swm}$;

26) $g = \frac{swm^2}{4\pi h}$; 29) $h = \frac{swm^2}{4\pi g}$; 30) $m = 2\sqrt{\frac{\pi hg}{sw}}$.

Welche Formeln noch weiter auszudehnen sind, wenn man noch aus der Planimetrie die Beziehungen zwischen Halbmesser, Durchmesser und Umfang eines Kreises anwendet, dort ist nämlich, wie bekannt, $d = 2r$ und $u = 2r\pi$.

Digitized by Google

$h = 50$	$h = 10$	$h = 41{,}3$	$h = \frac{5'}{12}$	$h = \frac{13}{12}$
$r = 2$	$r = 2{,}3$	$r = 6{,}78$	$r = \frac{1'}{12}$	$r = \frac{2}{12}$
$i = 628{,}32$	$s = 7{,}2$	$s = 0{,}9$	$s = 19$	$s = 8$
$m = 628{,}32$	$w = 44{,}39$	$w = 44{,}39$	$w = 44{,}39$	$w = 66$ preuß.
$w = 44{,}39$	$i = 166{,}18535$	$i = 5963{,}72$	$i = 0{,}00901'$	$i = 0{,}093993$
$s = 0{,}7$	$v = 7376{,}9676$	$v = 264729{,}53$	$v = 0{,}39995$	$v = 6{,}20353$
$g = 19523{,}79$	$g = 53134{,}16672$	$g = 238256{,}577$	$g = 7{,}59905$	$g = 49{,}62824$
$v = 27891{,}13$	$m = 144{,}509$	$m = 42{,}598740$	$m = 0{,}21746$	$m = 1{,}126227$

Digitized by Google

Beispiele
über
senkrechte Kreiscylinder.

h = 2,67	h = 0,54	h = 7,3 decim.	h = 0,91	h = 0,5
r = 0,21	r = 0,12	r = 2,4	r = 0,09	r = 0,1
s = 13,6	s = 2,3	s = 7,0	s = 8,5	s = 2
w = 56,41 österr.	w = 56,41 österr.	w = 1000 Gramm	w = 5641 österr.	w = 66 preuß.
i = 0,297901	i = 0,0027883	i = 132,8235	i = 2,315599	i = 0,015707
v = 16,804539	v = 1,2855839	v = 132823,5	v = 130,62243	v = 1,036662
g = 228,54120	g = 2,9568429	g = 929764,5	g = 1110,2904	g = 2,073324
m = 3,522798	m = 0,4071384	m = 110,07816	m = 0,5145777	m = 0,31415

Digitized by Google

§. 254. Ein cylindrisch gehöhlter oder hohler Cylinder oder Röhre habe als äußern Radius r, als innern r′ und als Höhe h, so ist 1) sein Inhalt $i = \pi h (r^2 - r'^2) = \pi h (r + r')(r - r')$ oder, wenn man die Dicke der cylindrischen Rinde, d. h. $r - r' = d$ setzt; 2) $i = \pi h d (2r - d)$; 3) $i = \pi h d (2r' + d)$; 4) $m = 2r\pi h$;

5) $m' = 2r'\pi h$; 6) $h = \frac{i}{\pi (r^2 - r'^2)}$; 7) $r = \sqrt{\left(\frac{i}{\pi h} + r'^2\right)}$; 8) $r' = \sqrt{\left(r^2 - \frac{i}{\pi h}\right)}$; 9) $d = r - \sqrt{\left(r^2 - \frac{i}{\pi h}\right)}$; 10) $d = -r' + \sqrt{\left(r'^2 + \frac{i}{\pi h}\right)}$;

11) $r = \frac{1}{2}\left\{\frac{i}{\pi h d} + d\right\}$; 12) $m = \frac{i}{d} + \pi d h$. etc.

und statt i wieder $\frac{v}{w}$ oder $\frac{g}{sw}$ gesetzt, gibt eine neue Reihe von Formeln, die wir nicht weiter entwickeln wollen.

Digitized by Google

Specielle Beiſpiele: (60).

$h = 10$	$h = 41{,}3$	$h = \frac{5}{12}$	$h = 0{,}54$	$h = 7{,}3$
$r = 2{,}3$	$r = 6{,}78$	$r = \frac{1}{12}$	$r = 0{,}12$	$r = 2{,}4$
$s = 7{,}2$	$s = 0{,}9$	$s = 19$	$s = 2{,}3$	$s = 7{,}0$
$w = 44{,}39$	$w = 44{,}39$	$w = 44{,}39$	$w = 56{,}49$	$w = 1000$
$r' = 1$	$r' = 2$	$r' = \frac{1}{24}$	$r' = 0{,}08$	$r' = 1{,}3$
$d = 1{,}3$	$d = 4{,}78$	$d = \frac{1}{24}$	$d = 0{,}04$	$d = 1{,}8$
$i = 134{,}7703$	$i = 5441{,}03$	$i = 0{,}66971$	$i = 0{,}010857$	$i = 93{,}33711$
$m = 144{,}5090$	$m = 42{,}598$	$m = 0{,}2174$	$m = 0{,}4071$	$m = 110{,}078$
$m' = 62{,}830$	$m' = 518{,}975$	$m' = 0{,}108987$	$m' = 0{,}27140$	$m' = 59{,}61764$
$v = 5983{,}45$	$v = 24166{,}04$	$v = 29{,}7289$	$v = 0{,}609228$	$v = 93337{,}11$
$g = 43080{,}8$	$g = 21749{,}43$	$g = 564{,}851$	$g = 1{,}40116$	$g = 653359{,}77$

Digitized by Google

$h = 0{,}5$	$h = 1\frac{7}{12}$	$h = 2,\ 67$	$h = 0{,}91$
$r = 0{,}1$	$r = \frac{2}{12}$	$r = 0{,}21$	$r = 0{,}09$
$s = 2$	$s = 8$	$s = 13{,}6$	$s = 8{,}5$
$w = 66$ preuß.	$w = 66$ preuß.	$w = 56{,}41$ öſterr.	$w = 56{,}41$ öſterr.
$r' = 0{,}02$	$r' = \frac{1}{12}$	$r' = 0{,}7$	$r' = 0{,}04$
$d = 1{,}98$	$d = \frac{1}{12}$	$d = 0{,}51$	$d = 0{,}05$
$i = 0{,}015078$	$i = 0{,}070595$	$i = 3{,}8927779$	$i = 0{,}018581$
$m = 0{,}31415$	$m = 1{,}126227$	$m = 3{,}522798$	$m = 0{,}5145777$
$m' = 0{,}06283$	$m' = 0{,}564765$	$m' = 11{,}74292$	$m' = 0{,}2287008$
$v = 0{,}990$	$v = 4{,}658940$	$v = 219{,}15721$	$v = 1{,}043585$
$g = 1{,}98$	$g = 37{,}2712$	$g = 2980{,}5352$	$g = 8{,}86975.$

§. 255. Eine Pyramide habe die Fläche = f und die Höhe = h, dann ist

$$1)\ i = \frac{fh}{3},\quad 2)\ f = \frac{3i}{h},\quad 3)\ h = \frac{3i}{f},$$

kurz dieselben Formeln wie in §. 252 nur dort $\frac{h}{3}$ statt h setzt. Auch gelten dann die dortigen Beispiele.

§. 256. Ein Pyramidalstumpf habe als große Fläche F als kleine f und als Höhe h, folglich ist

$$1)\ i = \frac{h}{3}\left\{F + \sqrt{Ff} + f\right\}$$

$$2)\ h = \frac{3i}{F + \sqrt{Ff} + f}$$

$$3)\ F = \frac{3i}{h} - \frac{f}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{12if}{h} - 3f^2}$$

$$4)\ f = \frac{3i}{h} - \frac{F}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{12iF}{h} - 3F^2}$$

u. s. f.

Beispiele: (24.)

h =	6	5	4,3	18,4	201,3	0,01
F =	4	2	5,7	56,4	8054,2	0,26
f =	9	1	2,3	37,2	6022,1	0,11
i =	38	7,3568	16,6528	836,472	1411844,39	0,001779

§. 257. Bei einem Kreiskegel sei h die Höhe, r der Radius der Basis und a die Länge der Kegelgerade, so ist

$$1)\ i = \frac{r^2\pi h}{3};\quad 2)\ m = ar\pi$$

und sonst läßt sich ähnlich wie im §. 253 eine Reihe von Formeln entwickeln, die hier noch durch die Beziehung, in welcher a, r und h zu einander stehen, einen neuen Zuwachs erhält, es ist nämlich $a = \sqrt{h^2 + r^2}$ und also z. B. $m = r\pi\sqrt{h^2 + r^2}$ u. s. f.

Auch die Beispiele von §. 27 lassen sich hier benützen, nur muß man die dort angegebene Höhe dreifach nehmen, und

Digitized by Google

dann aber auch a und m für den Kegel besonders berechnen. Also sind die Resultate dieselben wie dort, nur ist hier

$$h = 150$$
$$a = 150{,}13$$
$$m = 943{,}29. \text{ u. s. f.}$$

§. 258. Ein Kegelstumpf habe die Höhe h, den kleinen Radius r und großen R. Dann ist 1) sein Inhalt

$$i = \left(\frac{R^2 + Rr + r^2}{3}\right)\frac{h\pi}{}; \quad 2)\ m = a\pi\,(R + r)$$

wo $a = \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$);

$$3)\ h = \frac{3i}{\pi\,(R^2 + Rr + r^2)};$$

$$4)\ R = -\frac{r}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{12i}{h\pi} - 3r^2}\Big);$$

$$5)\ r = -\frac{R}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{12i}{h\pi} - 3R^2}\Big) \text{ u. s. f.}$$

Beispiele:

h =	1	2	0,45
R =	2	5	8,21
r =	1	3	2,45
a =	1,41	2,828	5,77762
i =	7,33	102,6013	44,04886
m =	13,28	71,0648	193,482198

h =	9,21	17,12	11,45
R =	3,56	8,3	2,3
r =	1,24	0,9	1
a =	9,4987	18,666	11,5234
i =	179,61606	1383,273	102,8742
m =	143,2176	539,4788	119, 427

Digitized by Google

§. 259. Eine Kugel habe als Radius r, folglich ist

1) $i = \frac{4}{3} r^3 \pi$; 2) $r = \sqrt[3]{\frac{3i}{4\pi}}$; 3) $i = \frac{d^3\pi}{6}$;

4) $m = 4r^2\pi$; 5) $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{\pi}}$; 6) $m = d^2\pi$;

7) $i = \frac{u^3}{6\pi^2}$; 8) $m = \frac{u^2}{\pi}$; 9) $v = \frac{4}{3} r^3 \pi w$;

10) $g = \frac{4r^3\pi ws}{3}$; 11) $r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi w}}$); 12) $r = \sqrt[3]{\frac{3g}{4\pi ws}}$).

Digitized by Google

Beiſpiele über Kugeln.

$r = 1$	$r = 10$	$r = 8$	$r = 20$	$r = \frac{7}{12}$
$w = 44{,}39$	$w = 47{,}39$	$w = 44{,}39$	$w = 66$	$w = 44{,}39$
$s = 2$	$s = 7$	$s = 7{,}6$	$s = 8{,}5$	$s = 0{,}8.$
$i = 4{,}1886$	$i = 4188{,}6$	$i = 2144{,}5632$	$i = 33508{,}8$	$i = 0{,}19763$
$v = 185{,}9319$	$v = 185931{,}95$	$v = 95197{,}018$	$v = 2211580{,}8$	$v = 8{,}7714$
$g = 371{,}8639$	$g = 1301523{,}65$	$g = 723497{,}276$	$g = 18798436{,}8$	$g = 7{,}01712$

$r = \frac{1}{12}$	$r = 1{,}56$	$r = 0{,}09$	$r = 10{,}2$	$r = 6{,}12$
$w = 56{,}49$	$w = 44{,}39$	$w = 66$	$w = 44{,}39$	$w = 66$
$s = 19{,}2$	$s = 10{,}3$	$s = 13{,}6$	$s = 3$	$s = 8$
$i = 0{,}0005644$	$i = 15{,}90166$	$i = 0{,}003053$	$i = 44449{,}7$	$i = 960{,}1147$
$v = 0{,}03183$	$v = 705{,}8453$	$v = 0{,}20130$	$v = 195134{,}183$	$v = 63367{,}2$
$g = 0{,}611285$	$g = 7270{,}2075$	$g = 2{,}73768$	$g = 585402{,}54$	$g = 506938{,}0$

§. 260. Eine kugelförmig ausgehöhlte Kugel oder Hohlkugel habe als äußern Radius r, als innern r', folglich ist 1) $i = \frac{4}{3}\pi\,(r^3 - r'^3)$; 2) $m = 4r^2\pi$; 3) $m' = 4r'^2\pi$; 4) d, das heißt die Dicke der Rinde $= r - r'$; 5) $i = \frac{4d.\pi}{3}(3r^2 - 3rd + d^2)$; 6) $r = \sqrt[3]{\frac{3i}{4\pi} + r'^3}$; 7) $r' = \sqrt[3]{r^3 - \frac{3i}{4\pi}}$; 8) $r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi w} + r'^3}$; 9) $r' = \sqrt[3]{r^3 - \frac{3v}{4\pi w}}$; 10) $r = \sqrt[3]{\frac{3g}{4\pi ws} + r'^3}$; 11) $r' = \sqrt[3]{r^3 - \frac{3g}{4\pi sw}}$.

Digitized by Google

Beiſpiele ſind:

$r = 1$	10	8	20	$\frac{7}{12}$
$w = 44{,}39$	44,39	44,39	66	44,39
$s = 2$	7	7,6	8,5	0,8
$r' = 0{,}5$	5	7	9	$\frac{6}{12}$
$i = 3{,}56502$	3664,125	707,8734	30455,31	0,30157
$v = 151{,}689$	21085,58	3107,549	2010050,4	$v = 13{,}36$
$g = 303{,}37$	147599,06	23617,304	17085428,9	$g = 10{,}688$

$r = \frac{1}{12}$	1,56	0,09	10,2	6,12
$w = 56{,}41$	44,39	66	44,39	66
$s = 19{,}2$	10,3	13,6	8,3	8
$r' = \frac{1}{36}$	1,21	0,04	8,2	5,12
$i = 0{,}002094$	8,45996	0,002764	2134,964	407,048
$v = 0{,}11789$	375,0955	0,1782	94768,211	26864,64
$g = 2{,}2617$	3863,427	2,312	284304,6	214917,12

Digitized by Google

Kapitel VII.

Vermischte Beispiele.

1) Das bayerische Klaftermaaß für Holz ist ein Quadrat von 6′, die Scheite haben eine Länge von $3\frac{1}{2}$′, wieviel Kubikfuß beträgt deßhalb ein Klafter (den leeren Raum nicht gerechnet?) Antwort: 126.

2) Eine Remise ist 30′ lang, 15′ breit und 20′ hoch, wieviel Klafter Holz faßt sie, das Klafter zu 126 Kubikfuß berechnet? Antw. $\frac{9000}{126} = 71\frac{3}{7}$.

3) Ein Balken hat die Form eines rechtwinkligen senkrechten Parallelepipedum und ist 42′ lang, $1\frac{1}{2}$′ breit und 2′ hoch, wieviel Klafter Holz enthält er? Antw.: 1 Klafter.

4) Eine Grube (senkrechtes rechtwinkliges Parallelepipedum) soll 30′ lang und 10′ breit werden, wie tief muß sie ausgegraben werden um 100 Schäffel Getreide zu fassen und was kostet sie zu graben, wenn der Kubikfuß ausgegrabene Erde $\frac{1}{10}$ kr. kostet, was kostet der Boden und die Seitenwände auszumauern den Quadratfuß zu 12 kr. berechnet? Antw.: 100 Schäffel = 20800 . 0,043 = 894,4 = i Kubikfuß, also die Tiefe = 2,98′, Ausgrabungskosten = 1 fl. 30 kr.; Ausmauerungskosten 107 fl. 42 kr.

5) Wie viele Backsteine gebraucht man zu einer Mauer, die 30 Meter lang, 15 Meter hoch und 0,5 Meter breit ist? Der Backstein sei = 0,22 lang, 0,15 breit und 0,05 hoch. Antw.: 45454,5.

6) Eine Brunnenröhre liefert in der Stunde 500 Maaß Wasser, bis wann ist ein Wasserbehälter, der die Form eines senkrechten rechtwinkligen Parallelepipedums hat, angefüllt, wenn er 10′ lang, 5′ breit und 4′ hoch ist?

Antw.: $i = \frac{200}{0{,}043} = 4656$ Maaß in $\frac{4656}{500} =$ 9h 18′ 36″.

Digitized by Google

7) Ein rechtwinklig senkrechtes Parallelepipedum von Zinn ist 1′ lang, 2 Duodecimalzoll breit und 3 Decimalzoll hoch, wiegt wie schwer, wenn das spec. Gewicht des Zinns 7,3 ist? Antw.: $16\frac{1}{5}$ bayr. Pfd.

8) Zwei Würfel sollen zu einem umgegossen werden, der eine hat die Seite 1, der andere die Seite 2, welches ist die Seite des neuen? Antw.: $\sqrt[3]{9} = 2{,}08$.

9) Aus einem Stück Blei, das 506 bayr. Pfd. wiegt, soll ein Würfel gegossen werden, welches wird seine Seite sein? Antw.: 1 bayr. Fuß.

10) Die Gewichte zweier Würfel derselben Materie verhalten sich wie 1 : 3, wie verhalten sich ihre Oberflächen? Antw.: 1 : 2,08.

11) Ein Pfd. Silber, dessen spec. Gewicht = 10,4 ist, koste 58 fl. Was kostet ein Würfel aus Silber, der 1 Fuß Seite hat und was kostet derselbe zu vergolden den Quadratzoll (dec.) zu 18 kr. berechnet? Antw: der Würfel kostet 26721 fl. 45 kr., die Vergoldung daran 180 fl.

12) Ein Kasten oder Ponton (§. 239) hat eine Höhe von 6′, das große Rechteck habe die Seiten 5′ und 2′, das kleine 3′ und 1′, wieviel Kubikfuß und wieviel Maaß enthält es? Antw.: 37 Kubikfuß, also 860,47 Maaß.

13) Ein Steinhaufen (an der Chaussee) habe die Form eines Pontons. Das große Rechteck habe die Seiten 6 und $2\frac{1}{2}$, das kleine 5 und 1; die Höhe sei 1, wieviel Kubikfuß Steine enthält er, wie schwer ist er das spec. Gewicht = 2 genommen? Antw.: 9,75 Kubikfuß und wiegt 865 Pfd. 19 Loth.

14) Eine Pyramide aus Bausteinen hat als Basis ein Rechteck, dessen eine Seite 6 und dessen andere 4′ ist, und eine Höhe von 15′, wie schwer ist sie und was kostet sie aufzumauern den Kubikfuß zu 24 berechnet? Antw.: Sie wiegt 13317 Pfd. und kostet 48 fl.

15) Ein Pyramidalstumpf aus Holz, der Rechtecke zur Basis

Digitized by Google

hat, habe beim großen Rechteck die Seiten 5 und 4, beim kleinen die Seiten 3 und 2 und die Höhe 9, wieviel Klafter Holz gibt er? Antw.: $\frac{111}{126}$ Klafter.

16) Ein Pyramidalstumpf habe eine Höhe von 15′, die große Grundfläche sei 36′, die kleine 16′ und es soll der Körper durch eine zu den Grundebenen parallele Ebene in zwei Theile zerlegt werden, die sich wie 2 zu 3 verhalten, in welcher Höhe liegt die Schnittfläche und welchen Inhalt hat sie?

Antw. (§. 240) $a = 30$, $i''' = 160$, $i = 380$ und $i' = 152$, $x = 7{,}48$ und die Schnittfläche $= 25{,}7$. Letztere ist, wenn x gefunden ist, nach Formel 3 §. 255. zu berechnen.

17) Ein Cylinder hat als Höhe den Durchmesser seiner Basis, wie groß ist dieser, wenn er eine Maaß hält, und wieviel Quadratfuß Blech braucht man zu seiner Boden- und Mantelfläche? Antw.: der Durchmesser ist $= 0{,}3798$ und man braucht $0{,}6795$ □ Fuß Blech.

18) Dieselbe Aufgabe, nur soll das Gefäß einen Liter enthalten? Antw.: Der Durchmesser $= 0{,}37136$ und $0{,}6499$ □ Fuß Blech.

19) Ein cylindrisch geformter Sack hat zum Umfang 4′ und hält einen Schäffel; wie hoch muß er sein? Antw.: 7,03.

20) Ein Guldenstück hat ein Gewicht von 255 Gramm, ein spec. Gewicht von 10,3 und einen Durchmesser von 30 Millmeter, welches ist seine Dicke und wie lange ist eine Hundertguldenrolle?

Antwort: 1,98 Millmeter. Die Hundertguldenrolle ist aber 198 Millmeter oder nicht ganz 2 Decimeter lang.

21) Ein messingner Cylinder ist 2,54′ lang und wiegt 16,4 Pfund; was kostet derselbe zu vergolden, d. h. sowohl die Mantelflächen, als auch die Basen, wenn der Quadratfuß auf 24 fl. kommt.

Antw. 113 fl. $5\frac{1}{2}$ kr.

22) Eine Brunnenröhre hat einen Querschnitt $= 1$ Quadratzoll und aus dieser strömt das Wasser mit einer Geschwin-

Digitized by Google

digkeit von 1′ per Secunde; wie viel Wasser liefert sie in einer Stunde?

Antw. 36 Kubikfuß oder 837 Maaß.

23) Zwei Cylinder haben gleichgroße Höhen, aber ungleiche Basisradien; wie verhalten sich ihre Inhalte und wenn sie gleich schwer sein sollen, wie müssen sich die spec. Gewichte ihrer Materie verhalten?

Antw. $i : i' = r^2 : r'^2$ und $s : s' = r'^2 : r^2$.

24) Zwei Cylinder verschiedener Stoffe haben gleiche Grundflächen und gleiches Gewicht; welches Verhalten haben ihre Höhen, die spec. Gewichte seien s und s′?

Antw. h : h′ und s′ : s.

25) Wie schwer drückt die Luft auf einen Quadratzoll (Duodezimal) bei den Barometerständen 26″ $26\frac{1}{2}$″ 27″ und $27\frac{1}{2}$″ und 28″?

Hiebei wird bemerkt, daß ein Barometerstand von a Zoll nichts anderes heißt, als der Druck der Luft ist der nämliche wie der einer Quecksilbersäule von a″ Höhe auf die angenommene Fläche. Das spec. Gewicht des Quecksilbers sei = 13, 6.

Antw. 9,0845, 9,2595, 9,4340, 9,6086, 9,7835.

26) Umgekehrte Aufgabe. Der Druck auf ein Quadratfuß beträgt a Pfund; welches ist der Barometerstand?

Antw. $= \frac{a}{144 . 13,6 . w}$.

27) Welches ist der Druck des Dampfs von 5 Atmosphären auf ein kreisförmiges Ventil, das 4″ (Duodecimal) im Durchmesser hat? (Der Druck der Luft bei 28″ Barometerstand wird mit dem Ausdruck der einer Atmosphäre bezeichnet). Bei 5 Atmosphären ist er 5 mal so groß.

Antw. $604\frac{7}{10}$ Pfd.

28) Eine Pumpe habe einen Kolben von 10″ (Duodez.) seine Hubhöhe beträgt 1′ und gehe in einer Minute 20 mal in die Höhe, wie viel Wasser liefert sie in einer Stunde?

Antw. 60,884 Maaß.

29) Ein beliebig gestaltetes Gefäß hat eine Bodenfläche von 1 Quadrat Decimeter, in ihm steht Wasser $2\frac{1}{2}$ Deci-

Digitized by Google

meter hoch; wie stark ist der Bodendruck, wenn derselbe durch das Gewicht einer Wassersäule gemessen wird, die die Bodenfläche als Fläche und die Höhe der Flüssigkeit als Höhe hat. Antw. 5 Killogramm.

30) Ein Cylinder besteht aus einem Stoffe, dessen spec. Gewicht = 0,75 ist; wie tief sinkt er im Wasser ein?

Antw. Bis zu drei Viertel seiner Höhe.

31) Zwei Cylinder stehen mit ihren gleichen Basen auf einander und sind so mit diesen fest zusammen verbunden.

Der untere Cylinder ist von Gußeisen, dessen spec. Gewicht = 7,2 ist, der obere von Tannenholz, dessen spec. Gewicht = 0,5 ist; zusammen sollen sie bis zu $^2/_3$ ihrer Gesammthöhe im Wasser einsinken, der hölzerne Cylinder habe eine Länge von 9,8″, welche hat der eiserne und wie verhalten sich die Gewichte der beiden Cylinder.

Antw. Hätte der eine Cylinder die Höhe h des spec. Gewichts s, der andere die Höhe h′ und spec. Gewicht s′ und soll der Gesammtcylinder bis zu $\frac{1}{n}$ der Gesammthöhe einsinken, so hat man

$$r^2\pi h w s + r^2\pi h' s' w = \frac{h+h'}{n} r^2\pi w \text{ oder } hs + h's' = \frac{h+h'}{n}, \text{ also ist}$$

$$h' = \frac{h(1-ns)}{(ns'-1)} = \frac{9{,}8\left(1-\frac{3}{2}\cdot 0{,}5\right)}{\left(\frac{3}{2}\cdot 7{,}2-1\right)} = \frac{1''}{4}$$

32) Ein hohler eiserner Cylinder von Gußeisen, dessen spec. Gewicht = 7,2 ist, wiegt 226,08 Killogramm, ist 2 Meter lang, wie dick ist seine Rinde, wenn der äußere Umfang 6,28 Decimeter hat. Antw. 7,07 Centimeter.

33) Ein Ofenrohr ist 10 Fuß lang und wiegt 10,036 Pfd. und hat einen äußeren Radius von $^1/_4$ Fuß, welches ist

Digitized by Google

seine Dicke und wie viel Quadratfuß Blech sind dafür verwendet worden? Antw. Dicke $= {}^{2}/_{10}$ Linie und Fläche $= 15{,}7$ Quadratfuß.

34) Ein Zuckerhut (Kegel) wiegt 10 Pfd. und hat einen Radius von 2,375″ (dec.), das spec. Gewicht sei 1,8, welches ist seine Höhe? Antw. 2,1184 Fuß.

35) Welches ist der Kreisausschnitt (von Blech), der gehörig zusammen gewickelt einen Kegel gibt von r Basisradius und h Höhe.

Der Radius r des Kreisausschnitts ist nach §. 215. die schiefe Seite des Kegels und der Bogen b des Kreisausschnitts ist der Umfang der Basis. Man hat demnach $r = \sqrt{r^2 + h^2}$ und vermöge der Planimetrie ist $b = r\varphi \frac{\pi}{180}$, wo φ den Winkel des Kreisausschnitts bedeuten soll, also ist

$$2r\pi = \sqrt{r^2+h^2}\ \varphi \frac{\pi}{180} \text{ oder}$$

$$\varphi = \frac{2r\pi \,.\, 180}{\pi\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{360\, r}{\sqrt{r^2+h^2}}.$$

z. B. $r = 44$; $h = 117$ gibt $\varphi = 126^\circ\ 43'\ 12''$.

36) Ein Kreiskegel besteht aus einer Masse, dessen specifisches Gewicht $= {}^{3}/_{4}$ ist, hat einen Basisradius $= 1'$ er steht (mit der Basis unten) im Wasser und es soll nun berechnet werden wie tief er eintaucht und welches der Radius der Basis des aus dem Wasser stehenden Kegels ist.

Faßt man die Aufgabe ganz allgemein auf und nimmt an, das spec. Gewicht sei $\frac{m}{n}$, so heißt dieß nichts anderes, als einen Kegel durch eine zur Basis parallele Ebene in zwei Theile so zu theilen, daß sich der Inhalt des untern Theils zu dem des Kegels verhält, wie m : n; denn es ist das Gewicht des untern Theils gleich dem Gewicht des ganzen Kegels, also hat man, wenn i den In-

Digitized by Google

halt des ganzen Kegels bedeutet, i' den des untern Theils:

$$isw = i'w \text{ oder } \frac{i'}{i} = s.$$

Für unser Beispiel ist $m = 3$ und $n = 4$, wenn aber der untere Theil sich zum ganzen Kegel verhält wie 3 : 4, so verhält sich der untere zum oberen wie 3 : 1; man darf also in §. 240. Anm. 2 nur $m = 1$ und $n = 3$ setzen, und man erhält somit $x = h \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ und als Radius der Schnittfläche $y = R \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ oder weil $R = 1$ ist, $= \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 0{,}63$.

38) Die Forstleute bestimmen den Inhalt eines Baumstammes von der Form eines Kegelstumpfes gewöhnlich so, daß sie ihn als einen Cylinder von gleicher Höhe und von einer Basis betrachten, die das Mittel aus den Radien der beiden Grundflächen als Halbmesser hat, es soll angegeben werden, wie weit sich dieser Inhalt vom wahren entfernt?

Der große Radius sei $= R$; der kleine $= r$, der mittlere ist also $= \frac{R + r}{2}$, somit der Inhalt nach der angegebenen Methode $= \frac{\pi h}{4}(R^2 + 2Rr + r^2)$; derselbe soll aber sein $\frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$, somit ist der berechnete um $\frac{\pi h}{12}(R - r)^2$ zu klein.

39) Wie viel Kubikmeilen hat die Erde und um wie viel ist sie größer als die Venus, wenn erstere eine Kugel vom Durchmesser 1719 und letztere eine Kugel vom Durchmesser 1688 Meilen sei.

Antw. Die Erde hat 2659073150 Kubikmeilen und ist um 141311606 Kubikmeilen größer.

40) Eine leichte Betrachtung zeigt, daß ein Stern, der vom

Digitized by Google

Centrum der Erde so weit entfernt ist, daß das Licht trotz seinem 40000 Meilenstiefel 100 Jahre braucht, nicht ganz 10^{22} Haardicken entfernt ist. Denkt man sich nun mit dieser Entfernung eine Kugel beschrieben und diese mit Sandkörnern ausgefüllt, die würfelförmig seien und als Würfelseite die Größe einer Haardicke haben, so gehen wie viele solche Sandkörner in diese ungeheure Kugel?

Antw. $\frac{4}{3} \cdot 10^{66}\pi$. Diese Zahl ist also 67 stellig, und man braucht, um sie zu berechnen, π nur auf 66 Stellen genau zu wissen.

41) Die Mündung eines Büchsenlaufs beträgt einen halben Zoll, wie schwer wiegen die Blei-Kugeln, die sie schießt?
Antw. 5,7111 Loth.

42) Wie groß ist der Durchmesser einer 6pfündigen, 12pfündigen und 88pfündigen gußeisernen Kanonenkugel?
Antw. 3,956; 5,986; 9,383 Zoll.

43) Aus einem Stück Messing, das 10 Pfund (spec. Gew. = 8) wiegt, soll eine Kugel gegossen werden, die Kugeloberfläche hierauf vergoldet, welches ist ihr Radius und was kostet die Vergoldung, den Quadratzoll (Duodez.) zu 18 kr. berechnet? Antw. Radius = 0,1887 und kostet 19 fl. 18 kr.

44) Eine silberne Kugel wiegt 4 Pfd.; es soll eine cylindrische Büchse von Blech gefertigt werden, welche die Kugel genau einschließt; was kostet die letztere, den Quadratzoll zu 4 kr. berechnet? Antw. 1 fl. 55 kr. $1\frac{1}{5}$ pf.

45) Aus einem Stück Messing, das a Pfund wiegt, sollen zwei gleiche Halbkugeln und ein Cylinder gegossen werden, der zum Radius (der Basis) den Radius der Halbkugeln hat, und zur Höhe den nfachen Radius; welches sind die Dimensionen, namentlich die Oberfläche des Körpers, wenn der Cylinder auf den Grundflächen der Halbkugeln aufsitzt.

Digitized by Google

Antw. Ist r der Kugelradius, so ist: $r = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi s w \left(\frac{4}{3} + n\right)}}$

ferner ist die Oberfläche $O = 2(n+2) \sqrt[3]{\frac{a^2 \pi}{s^2 w^2 \left(\frac{4}{3} + n\right)^2}}$.

46) Eine Hohlkugel aus einem Stoffe, dessen specif. Gewicht $= s$ ist, wiegt a Pfund, wird diese mit Wasser ausgefüllt, so wiegt sie b Pfd.; welches ist die Dicke d der Rinde?

Antw. Sind R und r die beiden Radien, so hat man die Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{4}{3}(R^3 - r^3)\pi w s = a \\ \frac{4}{3} r^3 \pi w = b - a \end{cases}$$

daraus ist

$$r = \sqrt[3]{\frac{3(b-a)}{4\pi w}}; \qquad R = \sqrt[3]{\frac{3a}{4\pi s w} + \frac{3(b-a)}{4\pi w}};$$

ferner $d = R - r$.

Z. B. $b = 12$; $a = 3$, $s = 1{,}239$, so ist:
$r = 0{,}3644$; $R = 0{,}3947$, also ist $d = 0{,}0303$.

47) Zwei Magdeburger Halbkugeln haben einen Radius von r Fuß; in ihrem innern Raum, von dem kurzweg angenommen werden soll, daß er dieselbe Fläche wie die äußere Oberfläche hat, werde die Luft verdünnt, und alsdann braucht man a Pfd. Kraft, um sie auseinander zu ziehen, bei einem Barometerstand von $2\frac{1}{3}$ Fuß; welches ist die Verdünnung der Luft im Innern?

Hiezu muß man zuerst durch die Formel $4 r^2 \pi . 9{,}78\,35.144$. (siehe Aufgabe 25.) den äußern Druck der Luft berechnen, hiervon a abziehen, so hat man den Druck von innen; aus diesem kann man nach Aufgabe 26.) den Barometerstand für die innere Luft berechnen, der Quotient von diesem in 28″ gibt die Verdünnung an. Es ist

Digitized by Google

somit die Zahl, welche den Grad der Verdünnung angibt, $= \frac{4.144.9{,}7835\, r^2\pi}{4.144.97835\, r^2\pi - a}$; ist z. B. $r = 1'$, $a = 17000$, also ist die Verdünnung eine 25,1fache.

47) Wie groß ist der Quadratinhalt einer Kugelzone, die die Höhe 2 und den Radius 10 hat?

Antw. 125,6636.

48) Eine Linse besteht aus zwei Kugelabschnitten von verschiedenen Radien r und r', ferner habe sie einen Oeffnungshalbmesser a; welches ist ihr Gewicht?

Antw. Gewicht $= \frac{ws\pi}{3}\left\{\left(r - \sqrt{r^2 - a^2}\right)\left(a^2 + r^2 - r\sqrt{r^2 - a^2}\right) \pm \left(r' - \sqrt{r'^2 - a^2}\right)\left(a^2 + r'^2 - r'\sqrt{r'^2 - a^2}\right)\right\}$.

49) Wie groß ist die Oberfläche und der körperliche Inhalt des Kugelzweiecks der Erde zwischen zwei beliebig angenommenen Meridiankreisen, z. B. zwischen 0^0 und 10^0 Länge?

Antw. Oberfläche $= \frac{1}{9}\, r^2\, \pi =$ und ebenso Inhalt $= \frac{r^3\pi}{27}$, oder Oberfläche $= 256447$ □M. und Inhalt $= 73933300$ Kubikmeilen.

50) Eine eiserne Kugel, die a Pfund wiegt, soll in Wasser schwimmen, wie groß ist ihr Durchmesser und welches die Eisenstärke?

Antw. $\frac{4}{3} R^3 \pi w = a$; hieraus $R = \sqrt[3]{\frac{3a}{4\pi w}}$ und $\frac{4}{3}(R^3 - r^3)\,\pi\, s\, w = a$, woraus man r findet, nämlich $r = \sqrt[3]{\frac{3a\,(s-1)}{4\pi s w}}$.

Digitized by Google

51) Es soll eine Hohlkugel aus einem Stoffe, dessen specifisch. Gew. $= s$ ist, gemacht werden, die a Pfd. schwer ist und bis zur Hälfte in Wasser schwimmt?

Antw. $\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3}\pi R^3 w = a, \\ \frac{4}{3}(R^3 - r^3)\pi w s = a \end{array}\right\}$, woraus man r und R findet,

nämlich $R = \sqrt[3]{\frac{3a}{2\pi w}}$ und $r = \sqrt[3]{R^3 - \frac{3a}{4\pi w s}}$,

dann ist $d = R - r$.

52) Zwei Kugeln, die eine vom Radius R, die andere vom Radius R' werden in eine umgegossen; welches ist der Radius derselben?

Antw. $= \sqrt[3]{R^3 + R'^3}$.

53) Wie viel Maaß enthält ein Faß, das an dem Boden einen Radius von 3′ und dessen Spundenhalbmesser $3\frac{1}{2}$′ groß ist und dessen Länge 6′ beträgt?

Antw. $= 210{,}48$ Kubikfuß $= 4894{,}9$ Maaß.

54) Betrachtet man das Faß als das Doppelte eines Kegelstumpfs von 3′ Höhe und den Radien $3\frac{1}{2}$ und 3 Fuß, so erhält man 149,485 Kubikfuß.

55) Betrachtet man aber das Faß als einen Cylinder, der dessen Länge zur Höhe und das Mittel aus beiden Radien zum Radius der Basis hat, so erhält man: 199,093 Kubikfuß.

56) Es soll der Unterschied der Fässer in den verschiedenen Berechnungen im Allgemeinen festgestellt werden.

Nach der ersten Methode der des §. 255 ist $i = \frac{h\pi}{3}(2R^2 + r^2)$,

nach der zweiten Methode ist $i = \frac{h\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$,

nach der dritten Methode ist $i = \frac{h\pi}{4}(R + r)^2$.

Digitized by Google

Unterschied zwischen der ersten u. zweiten ist demnach $\frac{h\pi R}{3}(R-r)$

Unterschied zwischen d. ersten u. dritten $\frac{h\pi}{12}(5R^2+r^2-6Rr)$.

57) Bei einer quadratischen Kugelkuppel sei $R = 1$; welches ist der Inhalt der Kuppel?

Antw. $\frac{4}{3}$.

58) Ein Kreiskonoid hat zur Basis 5 Quadratzoll und zur Höhe 4 Zoll; welches ist sein Inhalt?

Antw. 10 Kubikzoll.

59) In ein Faß, welches nicht ganz mit Wein angefüllt war, wurden a Pfd. reingewaschene Kieselsteine geworfen, um es geschlossen zu legen; wie viel Maß Wein fehlten zum Vollsein, wenn das spec. Gewicht des Kieselsteins $= s$ ist?

Antw. $= \frac{a}{0{,}043\, w\, s}$.

60) Wie viel Pfd. von einem Körper muß man an einen a Pfd. schweren andern Körper hängen, dessen spec. Gewicht $= s$ ist, damit derselbe im Wasser nicht untersinkt, wenn das spec. Gewicht des ersten Körpers $= s'$ ist?

Antw. $= \frac{a\, s'\,(s-1)}{s\,(1-s')}$.

Digitized by Google

Dritter Theil.

Die Lehre von der Darstellung räumlicher geometrischer Größen durch Zeichnung oder die darstellende Geometrie (géométrie descriptive).

Kapitel I.

Von den Bildern der Punkte, Geraden und Ebenen bezüglich einer Tafel.

§. 261. In diesem Theile der Stereometrie beschäftigen wir uns mit der Anfertigung von Zeichnungen räumlicher Gegenstände (also von solchen, die nicht in einer einzigen Ebene enthalten sind) auf *einer* Zeichentafel, d. h. auf einer Ebene, und zwar nicht etwa so, daß die erhaltenen Bilder, wie allenfalls die im gewöhnlichen Leben vorkommenden, nur einen ungefähren Begriff von der Form und Größe des Dargestellten geben, sondern es haben dieselben den bestimmten Zweck, die Anordnung der einzelnen Theile, deren Entfernung von einander, ihre Größen, kurz alle vorkommenden Dimensionen des Gezeichneten so genau aus sich entnehmen zu lassen, daß man die Gegenstände selbst hienach im Raum aufzubauen und so in Wirklichkeit darzustellen im Stande ist. Wir werden dabei bald erkennen, daß gerade

Digitized by Google

so, wie die sogenannte construirende Geometrie der Ebene eine Anwendung der planimetrischen Sätze ist, dieser Theil, die sogenannte darstellende oder descriptive Geometrie ist, eine Anwendung der stereometrischen Sätze, besonders derer im ersten Theil ist. — Sowie es ferner einen höheren Theil der Stereometrie gibt, der sich mit krummen Oberflächen und der von ihnen begrenzten Körper im Allgemeinen beschäftigt, so gibt es auch außer dem von uns behandelten Theil der darstellenden Geometrie, der nur die geometrischen Größen, die auch bisher schon vorkamen, zum Gegenstand seiner Betrachtung hat, noch einen höheren (äußerst wichtigen und interessanten) Theil, der sich auf krumme Oberflächen bezieht.

§. 262. Die Zeichentafel, auf welcher die Bilder dargestellt werden, ist eine Ebene und heißt in der Folge kurzweg die Tafel. Sie theilt den unendlichen Raum (gehörig verlängert gedacht) in zwei Theile, in den sogenannten positiven, (d. i. derjenige, in welchem der die Zeichnung ausführende Stift und das dieselbe betrachtende Auge) gedacht wird, und in den andern, welchen man den negativen heißt. Hienach theilt man auch alles, was Bezug auf diese zweierlei Räume hat, als positiv und negativ ab, so z. B. wenn Punkte auf zwei Seiten der Tafel in einem Bilde vorkommen, so heißt man die im positiven Raume befindlichen positiv, die andern negativ.

§. 263. Das erste, was die darstellende Geometrie zu behandeln hat, ist der Punkt und da an ihm nur seine Lage im Raume, d. h. sein Ort bestimmbar ist, so beschäftigt man sich zuerst mit der Anfertigung eines Bildes, das einen Punkt so darstellt, daß die Lage bezüglich der Tafel genau bekannt ist.

Der Punkt hat einen gewissen Abstand zur Tafel, dessen Größe durch eine bestimmte Längeneinheit zu messen und auszudrücken ist, wobei er noch positiv oder negativ sein kann, was man durch die Zeichen + und —, vor die diese Größen ausdrückenden Zahlen gesetzt, angeben kann. Um nun den Abstand des Punktes von der Tafel zu erfahren, haben wir nach §. 54. von ersterem auf letztere einen Perpendikel zu fällen; den Fußpunkt des Perpendikels merkt man sich, da er zur Bestimmung des Ortes vom Punkt eine wesentliche Rolle spielt und gibt ihm

Digitized by Google

den Namen Riß oder Projektion des Punktes auf die Tafel. Aus dem Riß und dem Abstand ist nun umgekehrt leicht der Ort des Punktes zu finden, indem man im Riß nur einen Perpendikel auf die Tafel aufzusetzen und auf diesen, sowie angegeben, nach positiver oder negativer Richtung die Größe des Abstands aufzutragen braucht, um den Punkt selbst als Endpunkt des Perpendikels zu erhalten. Wenn man sonach in der Zeichentafel neben einen Punkt eine positive oder negative Zahl schreibt (die Zahl bezieht sich dabei auf eine bekannte Längeneinheit), so kann dieser Punkt sammt der beistehenden Zahl als verlangtes Bild des Punktes im Raume gelten. So geschieht jedoch die bildliche Darstellung eines Punkts nur selten. Statt daß man die Größe und Richtung der Abstände durch eine mit Vorzeichen versehene Zahl gibt, macht man es, wie wir es auch von nun an immer thun werden, auf nachstehende Weise.

Man zieht nämlich durch die Zeichentafel eine im Allgemeinen von vornherein beliebige Gerade, die „Are", und fällt auf diese von den Rissen der darzustellenden Punkte aus, senkrechte Geraden; die Punkte, in welchen dieselben durch die Are gehen, werden „Arenrisse" oder „Arenprojectionen" genannt, auf diese Senkrechten selbst trägt man nun die Abstände auf und zwar die positiven alle gemeinschaftlich nach einer und die negativen alle zusammen nach der entgegengesetzten Richtung von der Are aus, so daß also der Abstand statt durch eine Zahl durch eine Zeichnung (graphisch) dargestellt ist. Den Endpunkt der Senkrechten, die den Abstand vorstellt, nennen wir Abstandspunkt. Dabei bedienen wir uns folgender feststehender Bezeichnungen: Die Punkte selbst, die darzustellen sind, erhalten Buchstaben des großen lateinischen Alphabets, die Risse der Punkte die entsprechenden Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets, die Arenrisse die entsprechenden Buchstaben des kleinen und die Abstandspunkte des großen deutschen Alphabets. So ist also vom Punkt **A** a der Riß, a der Arenriß, A der Abstandspunkt u. s. f. Vom Punkt **P** ist p der Riß, p der Arenriß und P der Abstandspunkt. Liegt ein Punkt zufällig in der Tafel, so ist er sein Riß selbst und sein Abstand ist gleich Null, dann ist also auch sein Abstandspunkt in der Are. Die Bezeichnung geschieht in diesem Fall blos durch die Buchstaben des großen Alphabets.

Digitized by Google

Nach diesen ist nun leicht einzusehen, daß Figur 35. das Bild ist von zehn verschiedenen Punkten **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, **H**, **I** und **K**. Um sich die Lage dieser Punkte vorzustellen, bedarf es weiter nichts, als daß man in den Rissen, d. h. in den mit lateinischen Buchstaben versehenen Punkten, Perpendikel errichtet, (durch Einstecken von Drähten, Stecknadeln ꝛc., denen man mit Hülfe des rechten Winkels die gehörige Richtung gibt), sie so lange macht, als die zwischen den deutschen Buchstaben enthaltene Länge angibt und zwar so, daß die Senkrechten, deren große deutsche Buchstaben sich auf derselben Seite der Axe befinden, auch auf derselben Seite der Zeichentafel liegen und die andern alle auf der entgegengesetzten. Alle Punkte, deren Abstandspunkte, (große deutsche Buchstaben) in der Axe liegen, liegen selbst in der Tafel und zwar da, wo die großen lateinischen Buchstaben stehen, wie z. B. **G**, **H**, **I**, und **K**, letzterer Punkt liegt dabei in der Axe selbst.

§. 264. Auf diese Weise sind, wie man leicht einsieht, die Punkte der darstellenden Geometrie gemäß abgebildet. Diese Art der Darstellung mit Hülfe einer Axe hat jedoch noch eine weitere Bedeutung und Anwendbarkeit. Es ist nämlich oft nöthig, die Zeichnung auf eine andere Tafel überzutragen. Zu diesem Zwecke ist nichts weiter nöthig, als auf der neuen Tafel zuerst die Axe zu ziehen, auf dieser die Axenrisse in den von der alten Zeichnung abzunehmenden Entfernungen abzutragen, dann durch die Axenrisse Perpendikel zu ziehen. In jedem dieser Perpendikel ist nun sowohl der Abstandspunkt als auch der Rißpunkt enthalten. Ersteren findet man, indem man den Abstand, letzteren, indem man die Entfernung des Risses von der Axe aus abträgt, bei beiden Abtragungen aber auch besonders auf die Richtung Bedacht hat. Die Entfernungen des Risses von der Axe wollen wir in der Folge **Rißentfernungen** heißen. Sowie die Abstände in positive oder negative zerfallen, je nachdem, ob die Punkte auf der positiven oder negativen Seite der Tafel liegen, ebenso sind auch die Rißentfernungen positiv oder negativ, je nachdem, die Risse auf der einen oder der andern Seite der Axe liegen, denn diese theilt die Tafel selbst in zwei Theile; welche von den zwei Richtungen der Rißentfernungen die

Digitized by Google

positive genannt wird, ist einerlei. Wir wollen jedoch festsetzen, daß die Richtung für die Rißentfernungen entgegengesetzt ist der für die Abstände. Es bedarf also blos einer Annahme, um die Richtungen zu bestimmen; z. B. ist in unserer Fig. a A die positive Abstandsrichtung, so hat man

aA, dD, eE und iJ + Abstände,
bB, cC und fF — Abstände,
aa, bb, cc, gG + Entfernungen,
dd, ee, ff, hH — Entfernungen.

Bei den Punkten G, H und K sind die Abstände und bei den Punkten J und K die Entfernungen der Null gleich. — Eine ähnliche Uebertragung kommt besonders auch da in der Anwendung vor, wo die vorkommenden Dimensionen zu groß sind, als daß sie in Wirklichkeit in der Tafel verzeichnet werden könnten. Man trägt dann sowohl die Entfernungen der einzelnen Axenrisse von einander, als auch die Abstände und Riß-Entfernungen in verkleinertem Maßstabe in der Zeichentafel auf, sobald derselbe bekannt ist, — gewöhnlich giebt man von ihm auf der Tafel selbst Kenntniß — erfüllt die Zeichnung selbst vollkommen ihren Zweck in allen Fällen.

§. 265. Nachdem wir uns hinreichend vertraut mit dem Bilde eines Raumpunktes gemacht haben, betrachten wir das einer Geraden im Raum. Da die Lage derselben durch die Lage zweier ihrer Punkte bestimmt ist, so reicht es hin, zwei Punkte einer Geraden zu zeichnen, um sie selbst zu veranschaulichen. Das Bild der Geraden AB ist z. B. in Fig. 36. durch aA und bB vollkommen gegeben und man erhält sie selbst sehr leicht aus ihr, wenn man sich die Punkte A und B nach den vorhergehenden Paragraphen vorstellt und durch diese Punkte die Gerade gelegt denkt; diese zwei Punkte kann man Bestimmungspunkte der Geraden heißen.

§. 266. Ein auf der Tafel senkrecht stehende Gerade hat die Risse von ihren sämmtlichen Punkten in dem Punkte, in welchem sie die Tafel schneidet. Hier fallen demnach die Risse der beiden Bestimmungspunkte zusammen und umgekehrt, wenn die Risse der letzteren zusammenfallen, so steht die Gerade derselben auf der Tafel senkrecht. Da der Abstandspunkt stets mit dem Riß in

Digitized by Google

der nämlichen, zur Axe senkrecht gezogenen Geraden liegt, so fallen hier die Abstandspunkte sämmtlicher Geradenpunkte in einer von dem Rißpunkt auf die Axe gefällte Senkrechte und umgekehrt: jeder Punkt der vom Rißpunkt auf die Axe gefällten Senkrechte kann als Abstandspunkt eines Punktes der Geraden angesehen werden. Den Riß bezeichnen wir mit einem Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets und umgekehrt, wo in der Folge ein Punkt in der Zeichentafel ohne zugehörigen Abstandspunkt und mit einem Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets versehen vorkommt, ist er das Bild einer in diesem Punkt auf der Tafel errichteten senkrechten Geraden. — Ein jeder Punkt der seinen Riß nicht in dem Rißpunkt der Senkrechten hat, kann kein Punkt von ihr sein.

§. 267. Liegen die Risse der beiden Bestimmungspunkte nicht aufeinander, so kann man durch sie eine Gerade in der Tafel ziehen und in dieser haben dann alle Punkte der Geraden, von welchen die beiden Bestimmungspunkte das Bild geben, ihren Riß.

Denn sämmtliche von den Punkten der Geraden auf die Tafel gefüllten Perpendikel bilden eine Ebene, die wir Perpendikelebene heißen wollen, und es liegen die Fußpunkte, d. h. die Risse der einzelnen Geradenpunkte in dem Durchschnitt dieser Ebene und der Tafel, also in einer Geraden, von der aber zwei Punkte, nämlich die Risse der Bestimmungspunkte bereits gegeben sind. Diese durch die Risse der zwei Bestimmungspunkte gehende und sämmtliche Risse der darzustellenden Geraden enthaltende heißt Rißgerade oder Riß und ein jeder Punkt der Tafel, der nicht in ihr liegt, kann auch nicht als Riß eines Punktes der Geraden angesehen werden. Doch allein daraus, daß ein Punkt seinen Riß in der Rißgeraden hat, kann umgekehrt nicht sicher geschlossen werden, daß er selbst ein Geradepunkt ist. Hiezu gehört noch die Erfüllung einer zweiten Bedingung; der Abstandspunkt, nämlich des fraglichen Punktes, muß auch in jener Geraden liegen, die durch die beiden Abstandspunkte der Bestimmungspunkte geht. Denn sind **A** und **B** die Bestimmungspunkte a und b die Risse, a und b ihre Arenrisse, A und B ihre Abstandspunkte und ist endlich **C** ein dritter Punkt der Geraden, folglich sein Riß c in der Rißge-

raden ab, ferner c sein Arenriß und C sein Abstandspunkt, so ist nach der Planimetrie und nach §. 97. in Fig. 37.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ab}{bc} = \frac{ab}{bc}, \text{ ferner } \frac{AB}{BC} = \pm\frac{Bb - Aa}{Cc - Bb}, \text{ nun}$$

ist aber $Aa = Aa$, $Bb = Bb$, $Cc = Cc$, deßhalb

$$\frac{ab}{bc} = \pm\frac{Bb - Aa}{Cc - Bb},$$

woraus leicht folgt, daß C in der Geraden AB liegen muß. Die Abstandspunkte der einzelnen Punkte der Geraden, wovon A und B die Bestimmungspunkte sind, liegen somit alle in einer Geraden, die durch die Abstandspunkte dieser geht, und die man Abstandsgerade heißt, und umgekehrt, ein jeder Punkt, der seinen Abstandspunkt nicht in dieser Geraden hat, ist auch kein Punkt der Geraden.

§. 268. Die beiden Geraden, die durch die Risse und Abstandspunkte von den Bestimmungspunkten einer Geraden im Raume gehen, können auch als Bild der letzteren gelten.

Denn um irgend einen beliebigen Punkt darzustellen, darf man nur in der Rißgeraden einen Rißpunkt annehmen und von diesem aus auf die Axe eine Senkrechte fällen und sie bis zum Schnitte mit der Abstandsgerade zu führen und der Durchschnittspunkt ist dann der zum Riß gehörige Abstandspunkt und folglich ist so ein jeder Punkt der Geraden bestimmt. Ebenso findet sich für einen willkührlich angenommenen Abstandspunkt der dazu gehörige Rißpunkt.

§. 269. Das Verfahren des vorigen Paragraphens ist jedoch nicht immer anwendbar. Ist nämlich eine der Bestimmungsgeraden senkrecht zur Axe, so trifft die auf die Axe zur Bestimmung des Abstandspunktes oder Rißpunktes, im Falle letzterer oder ersterer gegeben ist, gezogene Senkrechte mit der Rißgeraden oder Abstandsgeraden nicht in einem Punkte zusammen. Leicht begreifbar kann aber die Abstandsgerade nie senkrecht zur Axe sein, außer es ist die Rißgerade entweder ein Punkt oder selbst senkrecht zur Axe, und umgekehrt, ist die Rißgerade senkrecht zur Axe, so ist die Abstandsgerade es auch, wenn sie nicht etwa

Digitized by Google

ein Punkt der Rißgeraden iſt. Iſt der Riß aber ſenkrecht zur Are, ſo iſt die Perpendikelebene ſelbſt zur Are ſenkrecht nach §. 45. und umgekehrt, ſobald die Are ſenkrecht auf der Perpendikelebene ſteht, ſo ſteht ſie auf jeder in ihr liegenden, alſo auch auf der darzuſtellenden Geraden ſenkrecht, d. h. wenn eine Gerade im Raum ſenkrecht zur Are ſteht, ſo iſt ihr Riß ſenkrecht zur Are und umgekehrt. Wenn ferner in dieſem Falle die Abſtandsgerade ein Punkt iſt, der in der Rißgeraden liegt, ſo heißt dieß: die ſämmtlichen Punkte der auf der Are ſenkrechten Geraden haben gleichen Abſtand von der Tafel oder dieſe Gerade iſt gleichzeitig zur Tafel parallel und umgekehrt. Im Allgemeinen alſo geben Riß- und Abſtandsgerade ein vollkommenes Bild der Geraden, da man aus ihnen leicht zwei Punkte der Geraden beſtimmen kann. Fällt aber die Abſtandsgerade mit der Rißgerade zuſammen, was ſtets eintrifft, wenn die Gerade ſenkrecht zur Are iſt, ſo geben Riß und Abſtandsgerade kein deutliches Bild von ihr, indem es nicht möglich iſt, die Lage eines beſtimmten Punktes aus ihm zu gewinnen. Man muß demnach in dieſem Falle bei der urſprünglichen Darſtellungsweiſe mittelſt zweier Beſtimmungspunkte bleiben.

§. 270. Wir haben nun noch die Aufgabe zu löſen, wie zu einem dritten Punkt einer Geraden Riß und Abſtandspunkt zu ſuchen iſt, für den Fall, daß blos die zwei Beſtimmungspunkte gegeben ſind, und man das im vorigen Paragraphen Gelehrte nicht anwenden kann oder will.

Man conſtruirt Fig. 38. und Fig. 39. eine Hilfsfigur in der Zeichentafel (d. h. eine Figur, die keine weitere Bedeutung als Bild einer Raumgröße hat und deßhalb auch punktirt gezeichnet wird), indem man zuerſt die Rißgerade ab zieht und auf dieſe in den Riſſen der zwei Beſtimmungspunkte a und b der Perpendikel fällt, und auf dieſe die Abſtände abträgt und zwar nach gleicher Richtung oder nach entgegengeſetzter, je nachdem auch die Abſtände der Beſtimmungspunkte gleich oder entgegengeſetzte Richtung haben. Durch die Endpunkte **A** und **B** der beiden Perpendikel zieht man die Gerade **AB**. Von einem dritten Punkt **C** kann nun zuerſt der Riß gegeben ſeyn und man ſoll Abſtandspunkt ſuchen. Zu dieſem Zweck zieht man durch den Rißpunkt c, der nach dem vorigen Paragraphen jedenfalls in

der Rißgeraden liegt, ebenfalls auf letztere eine Senkrechte und verlängert dieselbe bis zum Schnittpunkt C mit der Geraden AB, dann ist cC der Abstand und hat gleiche oder entgegengesetzte Richtung wie der Punkt A, je nachdem cC mit aA auf gleicher oder verschiedener Seite von ab liegt; diesen Abstand trägt man nun auf cC dem Perpendikel zur Axe von c aus in gefundener Richtung als cC ab, und findet den Abstandspunkt C. Ebenso erhält man für d den Abstandspunkt D. Ist dagegen der Abstandspunkt gegeben und der Riß zu finden, so zieht man auch wieder AB wie vorhin, trägt dann den hier gegebenen Abstand cC auf aA als ax und zwar in derselben Richtung wie aA, wenn cC dieselbe Richtung wie aA hat, man erhält dadurch Punkt x; in x zieht man zu ab eine Parallele bis zum Durchschnitt mit AB und erhält dadurch xC, aus diesem den Riß c durch die zu aA parallele cC. Ebenso findet man, wenn D gegeben ist, den Riß mit Hülfe von by, welches auf Bb und mit ihm in gleicher Richtung und dabei so groß als dD aufgetragen wurde.

Der Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens ergibt sich einfach aus folgender Betrachtung: Wenn man in der Perpendikelebene zeichnen könnte, so würde sich die Lage der darzustellenden Geraden leicht durch Construktion auf die Weise ergeben, wie wir die Hülfsfigur gezeichnet haben, indem man nämlich in den Rißpunkten a und b auf die Rißgerade zwei Perpendikel fällt und diese mit Berücksichtigung der Richtung der Abstände den letztern gleich machte, man erhielte dann für die Gerade die Verbindungslinie der Endpunkte der Perpendikel, nämlich AB. Ist nun c der Riß eines dritten Punktes, so stellt der Durchschnitt des Perpendikels cC und der Geraden AB, nämlich C den darzustellenden Punkt und cC selbst den Abstand des Punktes C der Größe und Richtung nach vor. Da es nun offenbar an dem so gefundenen Abstand gar nichts ändert, in welcher Ebene auch die Construktion vollführt wird, so können wir die Hülfsfigur in der Tafel selbst construiren, und so wie oben gezeigt, für einen gegebenen Rißpunkt den Abstand und für einen gegebenen Abstand den Rißpunkt suchen.

§. 271. Da die Lage einer Geraden durch die zwei Punkte in jedem Falle bestimmt ist, so müssen auch alle jene

Digitized by Google

Beziehungen, die die Gerade und die Tafel zu einander haben, hieraus gefunden werden können; hiezu gehört aber:

a) die Auffindung der Lage eines jeden dritten Punktes der Geraden bezüglich der Tafel im Allgemeinen;

b) Insbesondere die Auffindung des Schnittpunktes der Geraden und der Tafel, den wir die Spur der Geraden heißen;

c) die Auffindung der Neigung der Geraden zur Tafel oder den Winkel, den sie mit der letztern macht.

Erste Aufgabe ist im vorigen §. zur Genüge abgehandelt worden. Aber auch die Lösung der zwei letzteren Aufgaben sind in der Lösung des vorigen Paragraphen bereits schon enthalten. Es ist nämlich unschwer einzusehen, daß der Durchschnittspunkt von **AB** und ab der in den **Fig. 38** und 39 mit **S** bezeichnet ist, die Spur der Geraden und der Winkel **ASa** der gesuchte Winkel ist.

Allein auch schon aus der Riß- und der Abstandsgeraden (mit Ausnahme des Falles, wo die Gerade senkrecht zur Are und schief zur Tafel liegt, wo man ja, wie schon oben bemerkt, auch mit der ersten Aufgabe nicht ins Reine kömmt, da überhaupt hier die Lage der Geraden nicht durch die genannten Bestimmungsgeraden gegeben ist), läßt sich die Spur leicht finden, wenn man bedenkt, daß die Spur als ein Tafelpunkt ihren Abstandspunkt in der Are, und ihren Riß mit sich selbst zusammenfallend hat, als ein Geradepunkt aber ihren Abstandspunkt in der Abstandsgeraden und ihren Riß in der Rißgeraden haben muß; man braucht also nur die Abstandsgerade bis zum Durchschnitt mit der Are zu verlängern, um den Abstandspunkt der Spur zu finden, und wenn man in diesem auf die Are einen Perpendikel construirt und ihn verlängert bis zum Durchschnitt mit der Rißgeraden, so erhält man die Spur selbst.

Es ist ferner auch unschwer einzusehen, daß in **Fig. 38** und 39 die Länge **AB** die Entfernung der beiden Bestimmungspunkten **A** und **B** vorstellt.

§. 273. Bei einer Geraden, die parallel zur Tafel ist, haben sämmtliche Punkte gleichen Abstand zur Tafel; eine solche Gerade hat also eine zur Are parallele Abstandsgerade, und umgekehrt,

Digitized by Google

ist die Abstandsgerade parallel, so ist die darzustellende Gerade zur Tafel parallel und hat zum Abstand von ihr den eines ihrer Punkte.

Eine Gerade, die dabei noch zur Axe parallel ist, hat, wie aus §. 91. leicht hervorgeht, dabei auch noch einen zur Axe parallelen Riß und umgekehrt.

§. 273. Nach dem Vorhergehenden läßt sich aus der Riß- und Abstandsgeraden die Lage einer Geraden im Allgemeinen leicht festsetzen:

Denn

a) Ist der Riß ein Punkt (mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet) und die Abstandsgerade eine von diesem Punkt auf die Axe senkrechte, so ist nach §. 266 die dargestellte Gerade, eine im Riß zur Tafel senkrechte. Fig. 40.

b) Ist die Abstandsgerade ein Punkt (mit dem großen deutschen Alphabet bezeichnet) und der Riß eine zur Axe Senkrechte, so ist dieß das Bild einer zur Axe senkrechten und gleichzeitig zur Tafel parallelen Geraden. Fig. 41.

c) Ist Riß und Abstandsgerade zur Axe senkrecht, so ist dieß das Bild einer zur Axe senkrechten Geraden, sie selbst aber nur dann bestimmt, wenn es zwei ihrer Punkte sind. Fig. 42.

d) Ist die Abstandsgerade parallel zur Axe, so ist die dargestellte Gerade parallel zur Tafel, die von ihr denselben Abstand wie einer ihrer Punkte hat. Fig. 43.

e) Ist die Abstandsgerade und der Riß parallel zur Axe, so sind sie das Bild einer zur Axe parallelen Geraden. Fig. 44.

f) Sind die beiden Bestimmungsgeraden sonstige zwei beliebige Geraden, wovon aber nicht eine zur Axe senkrecht, während die andere schief zu ihr ist, so stellen sie immer eine Gerade und zwar eine solche vor, die keine der in a) bis e) genannten speciellen Lagen zur Tafel hat.

In allen Fällen aber kann man sich die Gerade selbst sehr leicht dadurch darstellen, daß man sich zwei ihrer Punkte auf die in §. 263. angegebene Weise darstellt, und sich durch diese die Gerade gelegt denkt.

Immer ist aber dabei wohl zu berücksichtigen, daß jene Ge-

Digitized by Google

rade, die mit Buchstaben des lateinischen Alphabets bezeichnet ist, als Rißgerade und die mit deutschen Buchstaben als Abstandsgerade aus der Zeichnung erkannt wird.

§. 274. Wenn zwei Geraden einen Punkt mit einander gemein haben oder sich schneiden, so ist der Riß des gemeinsamen Punktes in beiden Rissen, folglich müssen dann die Risse der Geraden entweder sich decken oder sich schneiden, und ebenso ist der Abstandspunkt des gemeinsamen Punktes in beiden Abstandsgeraden, also müssen auch diese entweder sich decken oder sich schneiden, und da Riß und Abstandspunkt in einer zur Axe senkrechten Geraden liegen, so gelangt man leicht zu folgenden Schlüssen:

Wenn zwei Geraden sich schneiden, und

a) die Risse fallen zusammen, so müssen sich die Abstandsgeraden schneiden und der Schnittpunkt hat als Abstandspunkt ihren Durchschnitt und als Riß den Durchschnittspunkt von dem den beiden Geraden gemeinsamen Riß und dem vom Abstandspunkt auf die Axe gezogenen Perpendikel. Umgekehrt, wenn die Risse zusammenfallen und die Abstandsgeraden sich schneiden, so schneiden sich auch die Geraden.

b) Die Risse schneiden sich und die Abstandsgeraden decken sich. In diesem Falle liegt der Riß des Schnittpunktes im Durchschnitt der Risse, und sein Abstandspunkt in der gemeinsamen Abstandsgeraden und in dem vom Rißpunkt auf die Axe gefällten Perpendikel. Und umgekehrt.

c) Die Risse und Abstandsgeraden schneiden sich, und zwar in ein und derselben auf der Axe senkrechten Geraden, so ist Riß und Abstandspunkt des Durchschnittspunktes jedesmal der Durchschnitt der beziehlichen Bestimmungsgeraden. Und umgekehrt.

§. 275. Sind zwei Geraden parallel, so müssen ihre Rißgeraden entweder parallel sein, oder sich decken, indem die Perpendikelebenen und folglich auch die Risse sich nicht schneiden können, da nach §. 91. in zwei sich schneidenden Ebenen zwei Geraden nur parallel sein können, wenn sie zur Schnittlinie parallel sind, was hier blos in dem besondern Falle geschehen könnte, wenn die Geraden senkrecht zur Tafel sind.

Digitized by Google

Um nun zu sehen, wie sich die Abstandsgeraden verhalten, denkt man sich in jeder der zwei Geraden zwei Punkte, deren Risse in beiden gleiche Entfernung haben und dann die Hülfsfigur für jede Gerade, wie in §. 270 construirt ist; z. B. in Fig. 45 für A_1 und B_1, Punkte der ersten Gerade A_2 und B_2 der zweiten die Risse derselben a_1, b_1, a_2 und b_2, und es sei $a_1b_1 = a_2b_2$; denkt man sich ferner A_1B_1 und A_2B_2, wie dort gefunden, so muß, weil $a_1b_1 = a_2b_2$ auch $A_1B_1 = A_2B_2$ sein, denn da die Winkel für beide Geraden dieselben sind, so muß Winkel a_1b_1 mit A_1B_1, dem von a_2b_2 mit A_2B_2 gleich, also A_1B_1 und A_2B_2 parallel sein; aus diesem folgt nun weiter, daß $A_1a_1 - B_1b_1 = A_2a_2 - B_2b_2$, d. h. die Differenz der Abstände je zweier Punkte der Geraden sind einander gleich, und damit, daß auch $A_1a_1 - B_1b_1 = A_2a_2 - B_2b_2$, d. h. A_1B_1 parallel oder zusammenfallend mit A_2B_2 ist, also sind bei parallelen Geraden die Abstandsgeraden entweder parallel oder sie fallen zusammen.

Sind die Geraden parallel, so

a) fallen die Risse zusammen und die Abstandsgeraden sind parallel;

b) sind die Risse parallel und die Abstandsgeraden fallen entweder zusammen oder sind auch parallel;

Und umgekehrt sind die Bedingungen von a) oder b) erfüllt, so sind die Geraden parallel.

§. 276. Kreuzen sich die Geraden, so können nur noch die jetzt übrigen Fälle stattfinden:

a) die Risse schneiden sich und die Abstandsgeraden sind parallel;

b) die Risse sind parallel und die Abstandsgeraden schneiden sich;

c) die Risse und Abstandsgeraden schneiden sich aber nicht in demselben Perpendikel auf die Are

Und umgekehrt ist eine der Bedingungen a), b), oder c) erfüllt, so kreuzen sich die Geraden.

§. 277. Eine Gerade ist gegeben, eine zweite zu suchen, die die erste schneidet.

Man nimmt einen Punkt in der Geraden an, dadurch,

Digitized by Google

daß man Riß- und Abstandsgerade durch einen Perpendikel zur Are schneiden läßt, dann zieht man durch den Schnittpunkt des Perpendikels mit dem Riß irgend eine neue Gerade, die den Riß, und durch den Schnittpunkt mit der Abstandsgeraden eine zweite, die die Abstandsgerade der gesuchten Geraden bedeutet. Soll die eine Gerade mit der gegebenen in einer Perpendikelebene liegen, so zieht man blos durch den Schnitt des Perpendikels und der Abstandsgeraden eine Linie, die dann die Abstandsgerade der gesuchten vorstellt, während gegebene und gesuchte Gerade einerlei Riß haben.

§. 278. Eine Gerade und ein Punkt ist gegeben; es soll eine neue Gerade gesucht werden, die durch den Punkt geht und die alte schneidet.

Man macht alles, wie in voriger Aufgabe; nur zieht man durch den Riß des gegebenen Punktes die neue Rißgerade und durch den Abstandspunkt des gegebenen Punktes die neue Abstandsgerade, da der gegebene Punkt ein Punkt der gesuchten Geraden sein soll.

§. 279. Eine Gerade und ein Punkt sind gegeben, durch den Punkt eine zweite Gerade zu legen, die mit der gegebenen parallel läuft.

Die Rißgerade der gesuchten muß den Riß des Punktes enthalten und parallel zur gegebenen Rißgeraden sein.

Man zieht deßhalb durch den gegebenen Rißpunkt eine Parallele zur gegebenen Rißgeraden und erhält so die Rißgerade der gesuchten Geraden. Ebenso findet man die Abstandsgerade der gesuchten.

Diese Aufgabe hat nur dann eine ungenügende Lösung, wenn die gegebene Gerade senkrecht zur Are, indem von der gesuchten Geraden, die dann auch senkrecht zur Are ist, blos Riß und Abstandsgerade gefunden wird, und diese in diesem Falle von der Geraden kein genügendes Bild geben. Man zieht Fig. 46 von der Geraden, indem zwei Punkte **A** und **B** in ihr gegeben sind, die Hülfsgerade **AB**. In c macht man c**C** senkrecht auf cc und gleich c**C**, und zieht durch **C** eine Parallele **CD** zu **AB**, von einem beliebigen Punkt **D** macht man die Gerade **Dd** senkrecht auf cc, macht c**D** = d**D**, von c aus in gehöriger Rich-

Digitized by Google

tung, (d. h. in derselben wie cC, wenn auch cC und dD dieselbe Richtung haben) und dann sind cC und dD Riß- und Abstandspunkte der gesuchten Geraden. Der Beweis für die Richtigkeit ergibt sich unschwer aus dem Frühern.

§. 280. Die Rißgerade und der Winkel einer Geraden, den sie mit der Tafel macht, ist gegeben; man soll die Abstandsgerade finden.

Man zieht Fig. 47 die Hülfsgerade AB unter dem gegebenen Winkel ASa zum Riß ab geneigt, und findet wie im vorigen Paragraphen die Abstandspunkte A und B und damit die Abstandsgerade.

§. 281. Ueber die Lage zweier Geraden wäre nun die Aufgabe zu lösen, die sich auf ihre Neigung untereinander beziehen, d. h. die Aufgabe zu lösen, wodurch der Winkel zweier Geraden aus ihrem Bilde, und umgekehrt wie das Bild zweier Geraden von gewisser Neigung gefunden wird; diese Aufgabe und sämmtlich hierauf Bezug habende werden wir jedoch erst im dritten Kapitel lösen.

§. 282. Durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, ist eine Ebene vollkommen bestimmt, das Bild einer Ebene wird demnach das solcher drei ihrer Punkte sein. Auch ein Punkt und eine Gerade, zwei sich schneidende und zwei Parallelgeraden bestimmen nach der Stereometrie die Lage einer Ebene, und es kann deßhalb durch die Bilder von diesen die Ebene selbst dargestellt werden, von der man sich dann die Lage leicht in Wirklichkeit veranschaulichen kann, indem man sich die Lage dreier Punkte von den gegebenen Bestimmungsgrößen nach Früherem versinnlicht.

§. 283. Eine auf der Tafel senkrechte Ebene hat die Risse von ihren sämmtlichen Punkten in einer Geraden, und zwar in jener, in welcher sie die Tafel schneidet, indem nach §. 61 sämmtliche Perpendikel, die von ihren Punkten auf die Tafel gefällt werden, mit der Ebene selbst zusammenfallen, die Gerade aber längs welcher irgend eine Ebene die Tafel schneidet, heißt man *Spur* der Ebene. Man kann deßhalb sagen, die Spur einer auf der Tafel senkrechten Ebene ist der Inbegriff sämmtlicher Rißpunkte derselben. Und umgekehrt, wenn die Risse dreier Punkte in einer Geraden liegen, ihre Abstandspunkte aber nicht alle drei zu einer

Digitized by Google

Geraden gehören, so ist die durch sie dargestellte Ebene eine zur Tafel senkrechte. Denn da einer der Punkte außerhalb der Geraden der zwei andern liegt, so bestimmen die drei Punkte (als nicht in einer Geraden liegend) eine Ebene; und es folgt aus §. 274 leicht, daß der Perpendikel von einem Punkte zur Tafel, die Geraden der beiden andern Punkte schneidet, somit in dieser Ebene liegt, also letztere auch auf der Tafel senkrecht steht. Ein jeder vierter Punkt der senkrechten Ebene kann also seinen Riß nur im Riß der Ebene, dabei aber einen beliebigen Abstand haben, somit ist in dieser mit dem Riß eines vierten Punktes noch nicht zugleich der Abstandspunkt gegeben; und ein Punkt, dessen Riß nicht im Riß der Ebene liegt, ist kein Punkt der Ebene.

Die Bezeichnung einer zur Tafel senkrechten Ebene sei eine Gerade mit zwei kleinen lateinischen Buchstaben versehen, die den Riß der Ebene vorstellt und keine Abstandspunkte dazu, weil sie beliebig sind. Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß eine solche Ebene nichts weiter ist als die sogenannte Perpendikelebene einer Geraden, die mit ihr gleichen Riß hat.

§. 284. Sobald eine Ebene senkrecht zur Axe ist, ist sie auch senkrecht zur Tafel, hat somit als Riß eine Gerade und zwar eine zur Axe senkrechte nach §. 45 der Stereometrie. Und umgekehrt, wenn die Risse dreier Punkte, die nicht zu einer Geraden gehören, in einer zur Axe senkrechten Geraden liegen, so ist ihre Ebene selbst zur Axe senkrecht. Denn sie ist jedenfalls zur Tafel senkrecht und da die Axe auf dem Durchschnitt der zwei auf einander senkrechten Ebene senkrecht steht und in der einen liegt, so steht sie auf der anderen senkrecht.

§. 285. Wenn eine (unbegrenzte) Ebene nicht senkrecht zur Tafel ist, so kann ein jeder Punkt der Tafel als Riß eines Ebenenpunktes angesehen werden, wie leicht zu beweisen ist. Es ist somit für eine gegebene Ebene die Annahme irgend eines Tafelpunktes als Riß eines ihrer Punkte erlaubt. Allein zu jedem Riß gehört ein bestimmter Abstand, indem ja bei zwei sich schneidenden Ebenen ein jeder Punkt der einen eine bestimmte Entfernung zur andern hat. Wenn somit der Riß eines Punktes, der zu einer bestimmten Ebene gehört, gegeben ist, so muß dar-

Digitized by Google

aus der zugehörige Abstand gefunden werden können und darf nicht willkührlich angenommen werden.

Ebenso kann für eine bestimmte Ebene der Abstand eines in ihr liegenden Punktes stets beliebig angenommen werden. Demselben Abstand entsprechen übrigens unzählig viel Punkte der Ebene, die alle in einer Parallelen zur Tafel nach §. 92 und also auch nach §. 91 in einer zur Spur der Ebene parallelen Geraden liegen. Es muß also bei einer bestimmten Ebene diese zur Spur parallele Gerade gefunden werden können, in welcher sämmtliche Punkte, die einem bestimmten Abstand entsprechen, liegen. Der Riß dieser Geraden ist dann auch der Riß sämmtlicher Punkte, die bei dem gegebenen Abstand Punkte der Ebene sind.

§. 286. Ist eine Ebene bestimmt, so ist es unschwer, unzählig viele Gerade zu finden, die in der Ebene liegen.

Denn ist die Ebene durch drei Punkte gegeben, so hat man, indem man die drei Punkte mit einander verbindet, auch drei Bestimmungsgeraden in der Ebene. Ist ein Punkt und eine Gerade gegeben, so kann man durch den Punkt eine zur Geraden Parallele oder sie Schneidende legen, die auch in der Ebene liegt, oder man hat zwei sich schneidende oder zwei parallele Geraden von der Ebene bereits gegeben, so daß also, wie auch die Ebene gegeben ist, auch zwei Geraden derselben als Bestimmungsgeraden bekannt sind.

Nimmt man nun in je einer Bestimmungsgeraden einen Punkt an, denkt sich beide Punkte verbunden, so hat man eine weitere Gerade, die in der Ebene liegt.

§. 287. Zu dem Rißpunkt eines Ebenenpunktes den Abstand zu finden.

Man denkt sich durch den Punkt eine Gerade gelegt, die in der Ebene enthalten ist, also entweder beide Bestimmungsgerade schneidet oder mit einer parallel ist. Ist in Fig. 48 **ABC** die Ebene und man zieht durch den gegebenen Riß **d** des Punktes eine Gerade **de** parallel zu dem Riß **(a b)** der einen Bestimmungsgeraden, welcher den Riß **ac** in **e** schneidet. **e** ist der Riß eines Punktes **E** der Geraden **AE**, folglich ist **E** in **AE** sein Abstandspunkt. Der Punkt **E** liegt aber auch in der

Digitized by Google

Geraden **DE** parallel zu **AB**, also zieht man durch E eine Parallele zu AB, dies ist ihre Abstandsgerade, construirt dann den Perpendikel d D zur Are, wodurch man endlich den Abstandspunkt D, zu dem Rißpunkt d gehörig, erhält.

§. 288. Zu einem gegebenen Abstand eines Ebenenpunktes den Riß zu finden.

Man weiß, daß der Punkt, der zur Tafel den gegebenen Abstand hat, in einer zur Spur also auch zur Tafel parallelen Geraden liegt, die selbst von der Tafel um den Abstand entfernt ist, man darf also nur eine zur Are parallele und von ihr um letztere entfernte Gerade ziehen, so ist dieses die Abstandsgerade der Gesuchten. Diese schneidet die Abstandsgeraden von zweien Bestimmungsgeraden der Ebene in zwei Punkten, deren Risse sehr leicht zu finden sind, welche verbunden die Rißgerade der gesuchten Geraden, d. h. derjenigen ist, die in der Ebene liegt und von der Tafel um einen gegebenen Abstand entfernt ist. **Fig. 49.**

§. 289. Wenn eine Ebene parallel zur Tafel ist, so haben alle ihre Punkte gleichen Abstand zur Tafel, zieht man deßhalb eine zur Are parallele Gerade, so liegen in ihr sämmtliche Abstandspunkte der Ebene. Die Rißpunkte sind wieder beliebig. Wir wollen in der Folge eine parallele Ebene damit bezeichnet wissen, daß wir eine Gerade zur Are parallel ziehen und dieselbe mit großen deutschen Buchstaben bezeichnen.

Umgekehrt, wenn drei Punkte (z. B. die drei Bestimmungspunkte) gleichen Abstand zur Tafel haben, so ist ihre Ebene parallel zur Tafel.

§. 290. Die Spur einer die Tafel schneidenden Ebene zu finden.

Man sucht die Spur zweier Geraden der Ebene, so sind dies Punkte der gesuchten Spur, wie unschwer einzusehen ist.

§. 291. Wenn eine Ebene zur Are parallel ist, so hat sie nach §. 91 eine zur Are parallele Spur; und umgekehrt, wenn die Spur eine Ebene zur Are parallel ist, so ist sie selbst zur Are parallel nach §. 11.

§. 292. Der Winkel einer Ebene zur Tafel wird leicht durch folgende Hülfsfigur gefunden.

Digitized by Google

Man sucht die Spur der Ebene. Alsdann zieht man vom Risse a eines Ebenenpunktes eine Senkrechte ax zur Spur, den Fußpunkt x dieses Perpendikels verbindet man mit dem Punkt A, so steht nach §. 17 Ax senkrecht auf der Spur und es ist Axa der gesuchte Winkel. Aa ist der Abstand des Punktes, ax selbst ist leicht zu finden, als Entfernung des Risses a zu der Spur. Man darf somit nur mit diesen zwei Längen als Katheten ein rechtwinkeliges Dreieck konstruiren und dann ist der dem Abstand gegenüberliegende Winkel der spitze Winkel der Ebene zur Tafel. In Fig. 50 ist Sx die Spur und A ein Punkt gegeben und daraus der Winkel ayA gefunden, wo ay = ax ist.

Es ist leicht einzusehen, daß man den Winkel auf ganz gleiche Weise auch finden kann, wenn man statt der Spur der Ebene eine zu der Spur parallele Gerade (die nach §. 388 leicht gefunden wird) gegeben hat. In Fig. 49 ist BC eine solche Gerade, ax eine vom Risse des Ebenenpunktes A auf dieselbe gezogene Senkrechte und daraus ist Ayz der gesuchte Winkel, wenn yz = ax ist.

§. 293. Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, die mit der Tafel einen bestimmten Winkel macht.

In Fig. 51 ist aA der gegebene Punkt und Aya der Winkel. Man construirt das Dreieck Aay und mit ay als Radius und a als Centrum einen Kreis, dann ist jede Tangente XS daran die Spur einer verlangten Ebene.

§. 294. Durch eine Gerade eine Ebene zu legen, die mit der Tafel einen gegebenen Winkel macht.

a. Die Gerade ist in der Tafel also Spur der Ebene. XS soll die gegebene Spur, a der beliebig gewählte Riß eines Punktes der gesuchten Ebene sein. Man ziehe Fig. 51 aa, mache ay = ax und nun ayA = dem gegebenen Winkel, so ist A der Abstandspunkt des Ebenenpunktes, somit nun die Ebene selbst bestimmt.

b. Die Gerade ist parallel zur Tafel.

Die Spur der Ebene ist nach §. 91 zur gegebenen Geraden parallel AB ist die gegebene Gerade. Man mache in Fig. 52 Aya dem gegebenen Winkel gleich, dann

Digitized by Google

ax = ay senkrecht darauf und endlich durch x mit ab eine Parallele gibt die verlangte Spur.

c. Die Gerade schneidet die Tafel.

Die Spur der Ebene geht durch die Spur der Geraden, deßhalb sucht man letztere. Hierauf wird Fig. 53 Aya construirt, mit ay ein Kreis aus a als Centrum gemacht und von S die Tangente Sx gezogen, gibt die Spur.

§. 295. Durch einen Punkt eine Gerade legen, die zu einer Ebene parallel ist.

Man zieht durch den Punkt eine Gerade, die mit einer Geraden der Ebene parallel ist, so ist dieß nach §. 11 die Gesuchte.

§. 296. Eine Ebene und eine Gerade ist gegeben, es soll untersucht werden, ob die Gerade zur Ebene parallel ist.

Man zieht in einem Punkt der Ebene eine Gerade parallel zur gegebenen. Hat diese Gerade noch einen zweiten Punkt mit der Ebene gemein, was wir nach §. 206 finden, so ist sie eine Gerade derselben und folglich ist die gegebene Gerade parallel zur Ebene. Ist aber dieß nicht der Fall, so ist die gegebene Gerade nach §. 107 nicht zur Ebene parallel. Unmittelbar aus dem Bilde einer Geraden und einer Ebene läßt sich somit der Parallelismus beider nicht erkennen.

§. 297. Durch einen Punkt eine Ebene legen, die zu einer gegebenen Geraden parallel ist.

Man legt durch den Punkt eine Gerade, die zur gegebenen parallel ist, so ist jede Ebene, die diese als Bestimmungsgerade enthält zur gegebenen parallel.

§. 298. Durch eine Gerade eine Ebene zu legen, die mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

Auflösung ganz nach §. 34 der Stereometrie.

§. 299. Wenn zwei Ebenen parallel sind, so müssen sie auch nach §. 27 parallele Spuren haben. Aber umgekehrt, wenn die Spuren zweier Ebenen parallel sind, so brauchen die Ebenen selbst nicht parallel zu sein, sondern sie können sich auch in einer zu den Spuren parallelen Geraden schneiden. Wenn zwei Ebenen aber zwei paar sich schneidende Geraden, z. B. die Spuren und noch zwei andere, die Spuren schneidende, Geraden, parallel haben, so sind sie nach §. 37 parallel; sie sind es

Digitized by Google

auch, wenn sie parallele Spuren haben und gleiche Winkel mit der Tafel machen nach §. 95.

Um also von zwei gegebenen Ebenen zu erfahren, ob sie zu einander parallel sind, sucht man ihre Spuren und Winkel; sind erstere parallel und letztere gleich, so sind die Ebenen parallel, ist aber eine der Bedingungen nicht erfüllt, so sind auch die Ebenen nicht parallel. Oder man nimmt in der einen zwei beliebige Geraden an und zieht durch einen Punkt der andern zwei zu ihnen parallele, liegen letztere in der zweiten Ebene, so sind beide Ebenen parallel.

§. 300. Durch einen Punkt eine Ebene legen, die zu einer gegebenen parallel ist.

Man nimmt in der Ebene zwei Geraden an und zieht durch den Punkt zwei Parallele zu dieser, so sind diese die Bestimmungsgeraden der gesuchten Ebene. Fig. 54 und Fig. 55.

§. 301. Wenn eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, so steht ihr Riß auf der Spur der Ebene senkrecht.

Denn die Perpendikelebene der Geraden steht auf Tafel und Ebene senkrecht, folglich auch auf dem Durchschnitt der Tafel und der Ebene, d. h. auf der Spur. Wenn aber die Spur auf der Perpendikelebene senkrecht ist, so ist sie es auch auf dem Risse der Geraden.

Aber umgekehrt, wenn die Spur einer Ebene zum Riß der Geraden senkrecht steht, so steht deßhalb die Gerade noch nicht auf der Ebene senkrecht. Denn aus dem Perpendikularismus des Risses und der Spur läßt sich blos schließen, daß die Gerade auf der Spur und jeder damit parallelen Geraden senkrecht steht. Nach §. 83 muß aber der Winkel der Geraden mit der Tafel complementar sein zum Winkel der Ebene und Tafel. Um deßhalb zu untersuchen, ob eine Gerade zu einer Ebene senkrecht ist, sucht man die Spur und den Winkel zur Tafel von letzterer. Ist die Spur auf dem Riß der Geraden senkrecht, und der Winkel der Ebene mit der Tafel complementar zum Winkel der Geraden und der Tafel, so ist die Gerade zur Ebene senkrecht. Ist aber eine Bedingung nicht erfüllt, so ist sie es nicht.

§. 302. Eine Ebene und ein Punkt ist gegeben, durch den Punkt eine Gerade ziehen, die auf der Ebene senkrecht steht.

Digitized by Google

Man sucht zuerst Fig. 56 die Spur **XS** der Ebene **AXS** und zieht durch den Riß b des Punktes eine Gerade **bS** senkrecht zur Spur, macht **bB** auf **bS** senkrecht und gleich dem Abstand **bB** des Punktes. Hierauf sucht man den Winkel der Ebene, indem man **aX** von b aus auf **bB** als **bX** trägt und **aA** von b auf **bS** als **bA**, dann ist **XAb** der Ebenenwinkel und **AXb** der der Geraden. Nun zieht man durch **B** parallel zu **AX** eine Gerade nimmt den Punkt **C** darin an, zieht **Cc** parallel zu **XS**, ferner **Cc** senkrecht auf die Axe und macht **cC = Cc**, so ist der durch c und C gegebene Punkt ein weiterer Punkt der gesuchten Geraden und diese also durch **bc** und **BC** bestimmt.

§. 303. Durch eine Gerade eine Ebene legen, die auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht.

Man nimmt in der Geraden einen Punkt an und sucht nach vorhergehendem §. eine zweite Gerade, die auf der Ebene senkrecht steht, dann ist die Ebene der beiden Geraden die gesuchte.

§. 304. Ein Punkt und eine Gerade ist gegeben eine Ebene zu finden, die durch den Punkt geht und auf der Geraden senkrecht steht.

Man sucht Fig. 57 den Winkel der Geraden **bcB**, dann ist **bBC** der der Ebene zur Tafel. Macht ferner **bA = aA** und zieht **AX** parallel **BC**. Mit **bx** als Radius aus a einen Kreis gezogen und an diesen mit **Bb** parallel die Tangente gelegt, so ist diese die Spur der gesuchten Ebene nach §. 392 und dieselbe somit bestimmt.

§. 305. Die Kante zweier sich schneidenden Ebenen zu finden.

a. Beide Ebenen sind zur Tafel parallel, so sind sie unter sich parallel, haben also keine Kante.

b. Die eine Ebene **DE** Fig. 58 ist zur Tafel parallel, dann sucht man nach §. 288 zwei Punkte, die in der Ebene **ABC** liegen, welche die Tafel schneidet und von der Tafel gleichen Abstand **Dd** wie die zu dieser parallelen Ebene haben, verbindet die Punkte und erhält so die gesuchte **Kante DC**.

c. Beide Ebene schneiden die Tafel. Dann nimmt man eine dritte Hilfsebene an, welche zur Tafel parallel ist

Digitized by Google

und sucht nach b. die Kanten dieser mit den zwei Ebenen. Diese Kanten schneiden sich dann in einem Punkt, welcher der gesuchten Kante angehört; wiederholt man dieses Verfahren, so bestimmt sich die letztere selbst. Die Aufgabe ist dann besonders leicht auszuführen, wenn die eine der Ebenen auf der Tafel senkrecht ist, wie in Fig. 59.

§. 306. Den Schnittpunkt einer Geraden und Ebene zu finden.

Man sucht die Kante der gegebenen Ebene mit der Perpendikelebene der Geraden und wo diese von der Geraden geschnitten wird, dort ist der gesuchte Schnittpunkt. Fig. 60.

§. 307. Es bleiben uns nun noch verschiedene Aufgaben, die sich auf die Durchschnitt und Neigung einer Geraden und Ebene oder zweier Ebenen beziehen, übrig, diese Aufgaben aber wollen wir mit Hilfe der im nächsten Kapitel vorzutragenden Sätze lösen.

§. 308. Wenn nun irgend eine geradlinigt begrenzte Figur, z. B. ein ebenes N-eck oder ein eckiger Körper darzustellen ist, so reicht es hin die Eckpunkte durch Riß und Abstandspunkte zu geben, dieselbe dann in der gehörigen Aufeinanderfolge mit einander zu verbinden; die Geraden, welche die Rißpunkte verbinden, begrenzen eine Figur, die wir Rißfigur oder kurzweg Riß des Dargestellten nennen. Die Verbindungsgeraden der Abstandspunkte geben ebenso eine Figur, die Abstandsfigur heißt. Aus Riß und Abstandsfigur läßt sich dann umgekehrt sehr leicht wieder der Gegenstand, den sie darstellen, versinnlichen; wenn man sich nach frühern die Punkte versinnlicht und durch diese nach gehöriger Ordnung die Geraden und durch letztere wieder die zugehörigen Ebenen gelegt denkt. Hierüber jedoch später noch einiges Nähere.

Digitized by Google

Kapitel II.

Von der Annahme einer zweiten Tafel. Uebertragung der Bestimmungsgrößen einer Raumgröße, die sie bezüglich der einen Tafel hat, auf eine zweite.

§. 309. Nicht sowohl in der reinen darstellenden Geometrie zur Auflösung verschiedener Aufgaben, die uns noch übrig sind, als auch namentlich für die Anwendung im Maschinen- und Bauzeichnen ꝛc. ꝛc. ist es von großem Vortheil, ja oft unabweisbar nöthig, noch eine zweite Tafel anzunehmen und die Raumesgrößen, um welche es sich gerade handelt, auch hierauf zu beziehen. Dabei soll jedoch sogleich von vornherein, obwohl kaum nöthig, noch ausdrücklich bemerkt werden, daß Alles, was wir in dem vorhergehenden Kapitel bei der Darstellung von Punkten, Geraden, Ebenen ꝛc. auf eine Tafel gesagt haben, schon deßhalb auch bezüglich der zweiten Tafel gilt, weil wir im Vorhergehenden keine bestimmte, sondern eine ganz beliebige Tafel angenommen hatten. Es ist daher in diesem Kapitel in genannter Beziehung auch nichts Neues mehr hinzuzufügen, sein eigentlicher Zweck vielmehr ist aus den Größen, die die Lage der zweiten Tafel, bezüglich der ersten oder ursprünglichen Tafel bestimmen, sowie aus der Riß- und der Abstandsfigur in der ersten Tafel von einem darzustellenden Körper auch Riß- und Abstandsfigur in der zweiten Ebene zu finden.

§. 310. Sind die beiden Tafeln zu einander parallel, so muß der Abstand beider sowohl seiner Größe als Richtung nach gegeben sein und dann hat man leicht folgendes zu bemerken:

a. Die Risse eines Punktes für beide Tafeln liegen in ein und demselben Perpendikel, nämlich da, wo dieser die ersteren schneidet. Die Risse verschiedener Punkte bilden deßhalb und weil die Tafeln parallel sind in beiden die nämliche Figur und man kann somit die eine als die andere gelten lassen.

b. Sämmtliche Abstände bezüglich der zweiten Tafel findet man, wenn man in der ersten Tafel zur Axe eine parallele Gerade zieht, die zur Axe denselben Abstand sowohl der Größe als

Digitized by Google

Richtung nach hat, wie die zweite zur ersten Tafel, und diese Parallele dann als neue Axe ansieht. Es kann somit auch die Abstandsfigur der neuen Tafel als dieselbe wie in der alten Tafel angesehen werden und nur die Axe allein ist für die zweite Tafel eine andere als für die erste.

§. 311. Wenn sich die beiden Tafeln schneiden, so muß man vor allem so, wie wir es bereits in §. 290 gelernt haben, die Spur der zweiten Tafel, die sie zur ersten Tafel hat, aufsuchen. Diese Spur lassen wir nun vorläufig als Axe gelten, sowohl in erster als auch in zweiter Tafel. Wir müssen daher auch, da wir in der ersten Tafel gewöhnlich bereits schon eine andere Axe haben, von den Rissen Perpendikel zu der neuen Axe (die wir von nun an kurz mit dem Namen Axe bezeichnen) ziehen, um die Rißentfernungen und Axenrisse zu dieser in der ersten Tafel zu erhalten. Die Axenrisse bezeichnen wir mit den zugehörigen deutschen Buchstaben, die wir jedoch zum Unterschiede von den zur alten Axe gehörigen mit einem Accente versehen. Die erhaltenen Rißentfernungen heißen wir, weil sie in erster Tafel liegen, die ersten Rißentfernungen. Hierauf suchen wir den Winkel der beiden Tafeln nach §. 292, indem wir von einem Punkt P der zweiten Tafel, dessen Riß p und Abstand pP zur ersten Tafel bekannt sein muß, die erste Rißentfernung pP′ nehmen und sie auf einer Geraden (Fig. 61.) XX′ von O aus als Op auftragen, hierauf in p auf diese Gerade einen Perpendikel errichten und ihn so groß als den Abstand pP machen dadurch den Punkt P erhalten; durch P und O ziehen wir endlich die Gerade YY′, diese macht dann mit XX′ den Winkel der beiden Tafeln.

Man kann sich die Lage der beiden Tafeln selbst leicht versinnlichen, indem man sich in O auf die Papierebene eine senkrechte Gerade denkt, welche die Kante (Axe) der beiden Tafeln vorstellt, dann geht durch XX′ und diese Gerade die erste, sowie durch YY′ und die Gerade O die zweite Tafel. — Die beiden Tafeln machen, wie wir sehen, vier Winkel mit einander, wir wollen den als Hauptwinkel bezeichnen, in welchem sich der Stift befindet, der die Zeichnung ausführt, und ihn dann mit XOY bezeichnen, der übrigens nicht immer, wie hier, ein spitzer, sondern auch wohl ein stumpfer oder rechter sein kann.

Digitized by Google

§. 312. Wenn man sich von irgend einem darzustellenden Punkt **A** eine Ebene senkrecht auf die Kante der beiden Tafeln gelegt denkt, etwa wie die Ebene des Papiers bei unserer schon erwähnten Zeichnung Fig. 61., so erhält man zuerst die beiden Geraden **XX'** und **YY'** als Schnittgeraden der senkrechten Ebene und der Tafel. In dieser Ebene liegen aber auch die Perpendikel **Aa** und **Aa'**, welche vom Punkt **A** auf die Tafeln gefällt werden, wenn man die Risse und Abstände des Punktes bezüglich beider Tafeln erhalten will, als Senkrechte von **A** auf **XX'** und **YY'**. Ferner sind **Oa** und **Oa'** Senkrechte zur Axe, folglich stellt **O** den gemeinschaftlichen Axenriß und **Oa** die erste und **Oa'** die zweite Rißentfernung vor. Daraus folgt nun leicht, wie man die zweiten Rißentfernungen und die zweiten Abstände für jeden beliebigen Punkt, aus dem Winkel der beiden Tafeln, der ersten Rißentfernung und dem ersten Abstand, findet.

Nachdem man nämlich zuerst wie in §. 311. die erste Rißentfernung des darzustellenden Punktes, sodann den Winkel der beiden Tafeln gefunden und die Geraden **XX'** und **YY'** gezogen hat, trägt man die erste Rißentfernung des fraglichen Punktes **A** von **O** aus auf **XX'** als **Oa** auf und zwar nach derselben Richtung wie **Op**, wenn die Risse **p** und **a** auf gleicher Seite der Axe liegen und nach entgegengesetzter, wenn auf verschiedener. Hierauf errichtet man im Endpunkt **a** einen Perpendikel, macht ihn so groß, wie der erste Abstand **aA** ist und zwar in derselben Richtung wie **Pp**, wenn die Punkte **A** und **P** auch gleichgerichtete Abstände haben, im gegentheiligen Falle jedoch nach entgegengesetzter Richtung. Dadurch erhält man Punkt **A**, von diesem zieht man auf **YY'** den Perpendikel **Aa'**, der selbst den zweiten Abstand, sowie die Länge **Oa'** die zweite Rißentfernung vorstellt.

Liegt ferner die zweite Rißentfernung auf der nämlichen Seite von **XX'** und der zweite Abstand auf der nämlichen von **YY'**, wie der Hauptwinkel, so werden sie positiv, im gegentheiligen Fall negativ genannt.

§. 313. Nachdem auf solche Weise die zweiten Abstände und Rißentfernungen sowohl der Größe, als auch der Richtung nach gefunden sind, müssen wir sie auch in gehöriger Weise in der zweiten Tafel selbst auftragen.

Digitized by Google

Zuerst ist zu bemerken, daß wir die Arenrisse, da beide Tafeln, wie wir gesehen haben, eine gemeinschaftliche Are besitzen, und die Arenrisse in der ersten aber schon in §. 311 gefunden worden sind, bereits haben. Wir werden somit in der zweiten Tafel leicht die Riß- und Abstandspunkte dadurch erhalten, daß wir in den Arenrissen Perpendikel auf die Are errichten und auf denselben mit Hilfe der Rißentfernungen, diese in gefundener Größe und Richtung aufgetragen, die zweiten Risse und auf gleiche Weise auch die zweiten Abstandspunkte finden. Diese Zeichnung können wir aber in unserer ursprünglichen Zeichentafel, ohne daß sich hiedurch irgend etwas ändert, um so leichter ausführen, als hier die Are mit dem Arenrisse bereits gezeichnet ist, ja sogar auch schon die in letztern nöthigen Senkrechten (in §. 311. zur Auffindung der ersten Rißentfernungen) construirt worden sind. Man darf deßhalb nur auf diese Senkrechten von den Arenrissen aus die zweiten Rißentfernungen und zweiten Abstände in gehöriger Weise auftragen. Es kann dabei im Allgemeinen ganz gleichgiltig sein, welches die positive Richtung der aufzutragenden zweiten Entfernungen und Abstände ist. Allein wir wollen hierüber Folgendes festsetzen.

Wir denken uns die zweite Tafel durch den Supplementswinkel des Hauptwinkels gedreht, bis sie mit der ersten Tafel zusammenfällt, so daß sich in unserer Hilfsfigur **OY** durch den Winkel **YOX'** dreht, bis es auf **OX'** fällt. Dabei fällt die positive zweite Rißentfernung des gegebenen Tafelpunktes **P**, nämlich **OP** auf entgegengesetzter Seite von der ersten positiven Rißentfernung **Op**; wir nehmen deßhalb die Richtung der positiven zweiten Rißentfernung der positiven ersten Rißentfernung entgegengesetzt an. Die positive zweite Abstandsrichtung ist nach §. 264. der positiven zweiten Rißentfernung entgegengesetzt.

Die solchergestalt in der ursprünglichen Tafel verzeichneten zweiten Riß- und Abstandspunkte sind gewisser Massen von der zweiten Tafel auf die erste abgeklatscht, nachdem sich die zweite Tafel durch den Supplementswinkel des Tafelwinkels bis zum Zusammenfallen gedreht hat.

§. 314. Zur bessern Einsicht haben wir in Figur 61 mehrere Uebertragungen gezeichnet. Im Allgemeinen befinden sich die Punkte in den vier Winkeln der Uebertragungsfigur und haben die in folgender Tabelle ihrer Richtung nach benannten und in Figur 62 verzeichneten Bestimmungsstücke.

Digitized by Google

	Winkel XOY			Winkel X'OY					Winkel X'OY'			Winkel XOY'				
Punkt	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M	N	P	Q	R
Erste Rißentfernung .	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+
Erster Abstand . .	+	0	+	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−	−	−
Zweite Rißentfernung	+	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−	−	−	0	+
Zweiter Abstand	+	+	0	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+

Aus der Tabelle ersieht man, daß die sämmtlichen zweiten Risse der Punkte **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F** und **R** auf der einen, **G** und **Q** auf der Axe selbst, die andern auf der entgegengesetzten Seite der Axe liegen müssen, sowie daß die zweiten Abstandspunkte von **A**, **B**, **M**, **N**, **P**, **Q** und **R** auf der einen, die von **C** und **L** auf der Axe selbst und die der übrigen auf der andern Seite liegen müssen.

§. 315. Ist der Winkel der beiden Tafeln ein rechter, so sind, wie aus Fig. 63. leicht erkannt wird, die Rißentfernungen bezüglich einer Tafel sowohl der Größe als dem Zeichen nach die Abstände bezüglich der andern und umgekehrt. Man hat somit die erste Rißentfernung dem zweiten Abstand und die zweite Rißentfernung dem ersten Abstand gleich.

§. 316. Statt daß man die Zeichnungen der zweiten Riß- und Abstandsfigur an der Kante als Axe selbst vollzieht, nimmt man häufig und namentlich dann, wenn eine Ueberladung der Zeichnung sonst zu befürchten stünde, irgend eine beliebige Gerade als Axe an, zeichnet hierauf die zweiten Arenrisse, zieht dann in diesen Perpendikel auf die so angenommene Axe und trägt zuletzt auf diese die Rißentfernungen und Abstände in gehöriger Weise auf.

Man kann sich dabei die zweite Tafel zuerst bis zum Zusammenfallen auf die erste gehörig gedreht und hierauf in der Tafel so fortgeschoben denken, bis die Kante mit der als neue Axe angenommenen Geraden zusammenfällt. Diese Bewegung der zweiten Tafel wird gemeinhin das Umklappen derselben genannt. In Figur 62. ist $A''C''$ die angenommene dritte Axe der in §. 314. übertragenen Punkt.

§. 317. Wir haben oben blos die Aufgabe ins Auge gefaßt: Aus dem Winkel der beiden Tafeln, dem ersten Riß und dem Abstand eines Punktes, den zweiten Riß und zweiten Abstand zu finden. Ferner hat die Aufgabe, aus dem Winkel der Tafeln, dem zweiten Riß und Abstand den ersten Riß und Abstand zu finden, offenbar ganz gleiche Lösung, nur tragen wir die gegebenen zweiten Rißentfernungen auf YY' und die zweiten Abstände senkrecht

Digitized by Google

darauf und finden dann auf XX′ die ersten Rißentfernungen und senkrecht darauf die ersten Abstände.

Allein es können leicht auch noch bezüglich der Uebertragung von einer Tafel zur andern folgende Aufgaben gelöst werden:

a) Es ist der Winkel beider Tafeln und von einem Punkt die Rißentfernung bezüglich einer und der Abstand bezüglich der andern Tafel gegeben, die übrigen zwei Bestimmungsstücke zu finden.

Man konstruirt Fig. 64. unter den gegebenen Winkel geneigt die Geraden XX′ und YY′, trägt auf der Geraden XX′ die gegebene Rißentfernung als Oa auf, errichtet auf XX′ im Endpunkt a der Rißentfernung einen Perpendikel, zieht alsdann zu YY′ in dem nach Richtung und Größe gegebenen Abstand eine Parallele AM und vom Schnittpunkt A dieser mit der Senkrechten zieht man auf YY′ einen zweiten Perpendikel Aa′, wodurch nun alle vier Bestimmungsstücke wie in §. 314. bekannt sind.

b) Der Winkel zweier Tafeln ist gegeben und von einem Punkt die beiden Rißentfernungen bezüglich derselben, man soll die zwei Abstände finden.

Man zieht die Gerade OX und OY unter dem gegebenen Winkel zu einander geneigt, macht sie von O aus den beiden Rißentfernungen Oa und Oa′ gleich und zieht in den Endpunkten Perpendikel darauf, dann grenzt der Schnittpunkt dieser die gesuchten Abstände auf ihnen ab.

c) der Winkel zweier Tafeln und die Abstände eines Punktes von beiden sind gegeben; man soll die Rißentfernungen desselben suchen.

Man zieht Fig. 65. zuerst wieder die beiden Geraden OX und OY unter den gegebenen Winkel geneigt und zu ihnen parallel in den gegebenen Abständen zwei Geraden AM und AN, vom Schnittpunkt dieser letztern fällt man auf OX und OY die Perpendikel Aa und Aa′ und hat dann die Rißentfernungen Oa und Oa′.

d) Von einem Punkt sind die Rißentfernungen bezüglich zweier

Digitized by Google

Tafeln und der Abstand bezüglich einer gegebenen; man soll den Winkel der Tafeln und den andern Abstand finden.

Man zieht Fig. 66. die Gerade **OX** trägt von **O** aus die eine Rißentfernung **Oa** ab, und stellt am Endpunkt einen Perpendikel **aA** darauf, den man dem gegebenen Abstand gleich macht. Von dem Endpunkt dieses Perpendikels zieht man an einen Kreis, der in **O** sein Centrum und die andere Rißentfernung **Oa'** als Radius hat, eine Tangente **Aa'** und zum Berührungspunkt den Radius **Oa'**, dann stellt dieser die zweite Rißentfernung und die Tangente **Aa'** den zweiten Abstand dar. Im Allgemeinen gibt es zwei Lösungen in speziellen Fällen, aber auch nur eine oder gar keine.

c) Von einem Punkt sind die Abstände bezüglich zweier Tafeln und die Rißentfernung bezüglich einer gegebenen; man soll den Winkel der Tafeln und die andere Rißentfernung suchen.

Man zieht Fig. 67. zuerst wieder die Gerade **OX** und macht auf ihr ein Stück **Oa** der gegebenen Rißentfernung gleich, stellt im Endpunkt den Perpendikel darauf und macht ihn dem zugehörigen Abstand **aA** gleich. In dem so erhaltenen Endpunkt des Perpendikels construirt man mit dem zweiten Abstand **Aa'** einen Kreis und zieht an diesen von **O** aus eine Tangente **oa'**. Dann ist dieses die zweite Rißentfernung, der Radius selbst der zweite Abstand und der Winkel **aOa'** zwischen beiden Rißentfernungen der der Tafeln. Auch hier gibt es zwei oder eine oder keine Lösung.

Schließlich wird wiederholt nachträglich bemerkt, daß man bei allen Aufgaben dieser Art die durch die Vorzeichen angedeuteten Richtungen der gegebenen Stücke und die durch ihre Lage zu erkennenden der gesuchten wohl im Auge behalten muß.

§. 318. Von einer durch Riß und Abstand bezüglich einer Tafel gegebenen Geraden soll Riß, Abstand, Spur und Winkel bezüglich einer anderen Tafel gefunden werden.

Man sucht Riß- und Abstandspunkte von zwei Punkten der

Digitized by Google

Geraden bezüglich der neuen Tafel, die durch Punkt **P** und die Axe a′b′ gegeben ist, und verfährt dann, wie im vorigen Kapitel gelehrt wurde. In **Fig. 68.** sind a und b die ersten Risse, **A** und **B** die ersten Abstandspunkte, ferner sind nach §. 312. mit der Hülfsfigur **XOY** gefunden, a′b′ die zweiten Risse, **A′** und **B′** die zweiten Abstände. Somit ist a′b′ die zweite Rißgerade. Man fällt nun in a′ und b′ Perpendikel darauf, macht diese den zweiten Abständen der Richtung und Größe nach gleich und zieht dann die Gerade **AB**, welche a′b′ in **S′** schneidet, nun ist **S′** die zweite Spur und **AS′a′** der Winkel der Geraden zur zweiten Tafel. Will man **S′** noch bezüglich der ersten Tafel bestimmen, so zieht man **S′S′** auf die neue Axe senkrecht, trägt dieses in gehöriger Richtung auf **OY**, zieht dann vom Endpunkt s eine Senkrechte **Ss** auf **OX**, so ist **Os** erste Rißentfernung und **Ss** erster Abstand. Man macht somit **S′s = Os**, zieht **ss** senkrecht auf erste Axe und macht **sS = Ss**, so ist **s** erster Riß und **S** Abstandspunkt der zweiten Spur der Geraden, d. h. des Durchschnitts der Geraden und der zweiten Tafel.

Diese Aufgabe löst somit auch die des §. 306.

§. 319. Eine bezüglich einer Tafel gegebenen Ebene soll auf eine zweite Tafel bezogen werden; und alsdann die zweite Spur und der Winkel mit der zweiten Tafel gefunden werden.

Man sucht die zweiten Risse und die zweiten Abstandspunkte dreier Ebenenpunkte und verfährt dann wie im vorigen Kapitel gelehrt wurde.

In **Fig. 69.** sind **a**, **b** und **c** die ersten Risse, **A**, **B** und **C** die ersten Abstandspunkte; daraus findet man die zweiten Risse **A′**, **B′** und **C**, sowie die zweiten Abstandspunkte **A′**, **B′** und **C′** nach §. 312. Nun sucht man nach §. 290 die zweite Spur **B′C′** und dann nach §. 292 den Winkel **a′x′y′** der Ebene zur zweiten Tafel.

Will man eine Spur **B′c′** auf die erste Tafel beziehen, so sucht man die ersten Riß- und Abstandspunkte von **B** und **C′**; nun erhält man **bc** als ersten Riß, **BC** als Abstandsgerade der zweiten Spur der gegebenen Ebene oder des Durchschnitts der Ebene und der zweiten Tafel.

Diese Aufgabe löst somit auch die des §. 305.

§. 320. Die Riß- und Abstandsfigur irgend einer ebenen

Digitized by Google

Figur zu zeichnen, wenn die Lage ihrer Ebene zur Tafel, sowie die ebene Figur selbst ihrer Größe und Lage nach in der Ebene bestimmt ist.

Man sucht von der Ebene der Figur die Spur und den Winkel zur ersten Tafel und sieht sie als zweite Tafel an. Nun construirt man die Figur selbst, sowie sie ihrer Größe und Lage nach in ihrer Ebene gegeben ist, betrachtet dann ihre Punkte als zweite Tafelrisse — keine zweite Abstände haben sie nicht, als Punkte der zweiten Tafel — und sucht die ersten Risse und Abstände nach §. 312. Man braucht diese häufig nicht von allen Punkten der ebenen Figur, sondern nur von einer bestimmten Menge, muß sie aber zuletzt auf gehörige Art mit einander verbinden. So sind von einem n Eck nur die n Eckpunkten, von einem Kreis eine beliebige Menge ziemlich naheliegender Punkte nöthig. In Fig. 70 ist ein Viereck $A'B'C'D'$ auf die erste Tafel bezogen und gilt als Rißfigur abcd und als Abstandsfigur ABCD. In Fig. 71. ein Kreis $A'_1\ A'_2 \ldots A'_{12}$, der als Rißfigur die Ellipse $a_1\ a_2 \ldots a_{12}$ und als Abstandsfigur die Ellipse $A_1\ A_2 \ldots A_{12}$ hat.

§. 321. Aus dem Riß und der Abstandsfigur einer ebenen Figur sie selbst ihrer wahren Größe und Gestalt nach zu bestimmen.

Man sucht die Ebene der Figur, d. h. den Winkel und die Spur derselben zur Tafel, sieht sie dann als zweite Tafel an und sucht die zweiten Risse von einer genügenden Anzahl Punkte aus ihren ersten Rissen und Abstände nach §. 317. In Fig. 72 ist aus der Rißfigur Ellipse $a_1\ a_2 \ldots a_{12}$ und der Abstandsgerade $a_1\ a_2 \ldots a_{12}$, die wahre Figur selbst Kreis $A_1 A'_2 \ldots A'_{12}$ gefunden.

Kapitel III.

Anwendung einer zweiten Tafel zur Auflösung verschiedener Aufgaben.

§. 322. Die Entfernung eines Punktes von einer Ebene zu finden.

Digitized by Google

Man sieht die Ebene als zweite Tafel an und sucht den zweiten Abstand, d. h. die Entfernung des Punktes nach §. 312.

Ist die Ebene senkrecht zur Tafel, so braucht man vom Riß des Punktes nach §. 315. nur eine Senkrechte auf die Spur zu fällen.

In Fig. 73. bedeutet **A** den Punkt, **BCD** die gegebene Ebene und **Aa'** die gesuchte Entfernung.

§. 323. Entfernung zweier paralleler Ebenen oder einer Ebene und einer parallelen Geraden zu finden.

Man nimmt die eine Ebene als zweite Tafel an und sucht die Entfernung irgend eines beliebigen Punktes der zu ihr parallelen Ebene oder Geraden nach vorigem §. Dieß ist dann nach §. 59. und 56. die gesuchte Entfernung der zur Ebene parallelen Geraden oder Ebene.

§. 324. Eine Ebene ist gegeben; man soll einen Punkt, eine zu ihr parallele Gerade, oder Ebene finden, die zur Ebene einen bestimmten Abstand haben.

Die gegebene Ebene sieht man als neue Tafel an, nimmt hier auch den Riß des zu suchenden Punktes beliebig an, zieht die erste Rißentfernung und sucht nun nach §. 317. bei gegebener erster Rißentfernung und zweiten Abstand den ersten Abstand, so hat man den gesuchten Punkt vollkommen bestimmt. Sucht man auf die nämliche Weise noch einen Punkt und verbindet beide, so hat man eine Gerade, die in zwei Punkten zur gegebenen Ebene den gegebenen Abstand hat, also nach §. 92. zu ihr parallel ist und den gegebenen Abstand hat. Sucht man drei Punkte, so bestimmen diese eine zur gegebenen Ebene parallele mit gegebenem Abstand. In Fig. 74. ist **ABC** die gegebene und **DEF** die gefundene Ebene.

§. 325. Eine Ebene ist gegeben und eine Gerade; man soll einen Punkt der Geraden suchen, der zur Ebene eine bestimmte Entfernung hat.

Die Ebene betrachtet man als zweite Tafel, sucht zweiten Riß und Abstandsgerade der Geraden und bestimmt für den gegebenen zweiten Abstand eines ihrer Punkte den zweiten Riß, von dem man noch den ersten Riß und Abstandspunkt sucht.

In Fig. 75. ist **ABC** die gegebene Ebene, **DE** die gegebene Gerade und **F** der gesuchte Punkt.

Digitized by Google

§. 326. Ein Punkt und eine Gerade sind gegeben, man soll die Entfernung des ersteren vom letzteren finden.

Wenn beide gegebene Stücke in der Tafel liegen, so zieht man vom Riß des Punktes einen Perpendikel auf die Rißgerade und die Länge des letztern zwischen dem gegebenen Punkt und dem Fußpunkt ist die gesuchte Entfernung.

Liegen aber beide Stücke nicht in der Tafel, so betrachtet man ihre Ebene als neue Tafel, sucht ferner die neuen Risse von ihnen und macht nun das Uebrige wie vorher. In Fig. 76. ist **A** der gegebene Punkt, **BC** die gegebene Gerade und **AD** die gesuchte Entfernung.

§. 327. Zwei parallele Geraden sind gegeben; man soll ihre Entfernung finden.

Man sucht nach vorhergehendem Paragraphen die Entfernung eines Punktes der einen zur andern und dieses ist die verlangte.

§. 328. Den Winkel einer Geraden und einer Ebene zu finden. Man betrachtet die Ebene als Tafel und sucht dann den Winkel der Geraden zur neuen Tafel, indem man zuerst den neuen Riß der Geraden bestimmt und dann nach §. 271. verfährt. (Siehe §. 318.)

§. 329. Den Winkel zweier Ebenen zu finden.

Man nimmt die eine als neue Tafel an und bestimmt die andere bezüglich dieser durch drei ihrer Punkte; endlich sucht man den Winkel der zweiten Ebene zur neuen Tafel, welches der gesuchte ist. (Siehe §. 319.)

§. 330. Den Winkel zweier Geraden zu bestimmen.

Liegen die Geraden in der Tafel, so ist der Winkel ihrer Risse der gesuchte; liegen sie aber außerhalb der Tafel, so sieht man, wenn sie sich nicht etwa kreuzen, welchen Fall man dem §. 38. entsprechend behandelt, ihre Ebene als neue Tafel an, sucht die neuen Risse und der Winkel der letztern ist der gesuchte. In Fig. 77. sind **AB** und **BC** die gegebenen Geraden und **ACS** der gesuchte Winkel.

§. 331. Eine Gerade und eine Ebene sind gegeben; man soll durch die Gerade eine zweite Ebene legen, die zur ersten unter einem bestimmten Winkel geneigt ist.

Digitized by Google

Man sieht die gegebene Ebene als neue Tafel an, und macht das Uebrige ganz nach §. 294.

§. 332. Eine Gerade und ein Punkt außer ihr ist gegeben; man soll durch den Punkt eine zweite Gerade legen, die mit der ersten einen bestimmten Winkel macht.

Wenn die gegebenen Stücke in der Tafel liegen, so zieht man durch den Riß des Punktes eine Gerade, die zum Riß der Geraden den gegebenen Winkel macht und dieß ist dann der Riß der gesuchten Geraden.

Liegen die gegebenen Stücke aber nicht in der Tafel, so betrachtet man ihre Ebene als neue Tafel, sucht von ihnen die zweiten Risse, löst die Aufgabe wie vorhin, wodurch man den zweiten Riß der Geraden erhält, welche man schließlich nur noch auf erste Tafel zu beziehen hat.

§. 333. Eine Gerade und ein Punkt ist gegeben; man soll von dem Punkt auf die Gerade einen sie schneidenden Perpendikel ziehen.

Diese Aufgabe ist ein specieller Fall der vorhergehenden und wird also nach dieser gelöst.

§. 334. Den Winkel zweier Geraden durch Geraden, welche in der Ebene der ersten enthalten sind und durch den Scheitel gehen, in beliebige Theile theilen.

Liegen die Geraden in der Tafel, so theilt man die Winkel ihrer Risse nach der Planimetrie. Ist aber dieß nicht der Fall, so sieht man die Ebene der Geraden als neue Tafel an, macht es, wie eben gesagt, und sucht zuletzt von den Theilgeraden die Bestimmungsstücke bezüglich der alten Tafel.

§. 335. Den Winkel zweier Ebenen in beliebige Theile zu theilen. Diese Aufgabe ist nach §. 331. zu lösen.

§. 336. Zwei sich kreuzende Gerade sind gegeben; man soll finden

a) ihre Entfernung,

b) die Gerade, welche auf beiden gleichzeitig senkrecht steht und sie schneidet.

Durch einen Punkt **A** der einen Geraden **AB** Fig. 78. legt man eine Gerade **AE** parallel zur andern **CD**, sieht die Ebene **ABE** als neue Tafel an; der Abstand irgend eines Punk-

Digitized by Google

tes der Geraden **CD** zur neuen Tafel ist nun die gesuchte Entfernung.

Um den zweiten Theil der Aufgabe zu lösen, reicht es hin, die neuen Risse der Geraden **AB** und **CD** zu suchen; der Durchschnittspunkt beider, nämlich f, ist der zweite Riß und F′G′ die zweite Abstandsgerade, wobei F′G′ der schon gefundenen Entfernung der gegebenen Geraden gleichgemacht ist, von der gesuchten Senkrechten, ferner ist **fg** der erste Riß und **fG** die erste Abstandsgerade derselben. Der Beweis für die Richtigkeit der Auflösung liegt in §. 62. Dem aufmerksamen Beobachter der Fig. 78 wird übrigens eine aus ihr hervorgehende einfachere Lösung nicht entgehen.

Als Einübung der vorhergehenden Sätze, sowohl der im ersten, als der im zweiten Kapitel, dienen auch jene von den im ersten Theil enthaltenen Aufgaben, die wir nicht etwa schon besonders behandelt haben. Es wäre unnöthig, von diesen die Auflösungen, die im ersten Theil schon geometrisch gegeben wurden, hier zu wiederholen, und wir begnügen uns nur mit der Bemerkung, daß die treffenden Aufgaben in den §§. 85, 87, 88 und 114—130 enthalten sind.

Kapitel IV.

Aufgaben, welche sich auf die Darstellung der Oberflächen von den drei runden Körpern beziehen.

§. 337. Wenn die Aufgabe gegeben ist, das Bild einer Kugel zu finden, von welcher die Lage des Mittelpunktes und der Radius gegeben ist, so heißt dieß nichts anders, als alle Punkte darstellen, die von dem als Mittelpunkt gegebenen um den gegebenen Radius entfernt sind.

Wir dürfen deßhalb nur die Bilder einer genügenden Anzahl solcher Punkte suchen, um der Aufgabe zu entsprechen. Zieht man mit dem gegebenen Kugelradius als Halbmesser aus dem Rißpunkt als Centrum einen Kreis, so können alle Punkte dieses Kreises die Risse von Kugelflächepunkten sein und alle Punkte außerhalb des Kreises sind keine Risse von solchen. Ebenso stellen die Punkte eines Kreises, welcher vom Abstandspunkt des Mittelpunkts als Centrum und mit dem gegebenen Kugelradius als Halbmesser beschrieben wird, Abstandspunkte von Kugelober-

Digitized by Google

flächen vor. Die beiden genannten Kreise sind somit die Bestimmungsstücke der Kugel.

Den Beweis hiefür zu führen, kann dem Einzelnen überlassen bleiben, übrigens liegt er in der Auflösung des folgenden §.

§. 338. Das Bild einer Kugel ist gegeben; man soll einen Punkt ihrer Fläche darstellen.

a) Man nimmt in dem Rißkreis einen beliebigen Punkt als Rißpunkt des gesuchten an. In Fig. 79. sei z. B. aA das Bild des Kugelcentrums und b der angenommene Rißpunkt. Nun denkt man sich durch die Punkte A und B eine zur Tafel senkrechte neue Hülfstafel gelegt, sucht zuerst von A den neuen Riß a′ und zieht aus a′ als Centrum mit dem Kugelradius einen Kreis, macht bb'_1 b'_2 auf ab senkrecht und erhält bb'_1 und bb'_2 als die gesuchten zweiten Rißentfernungen, die den ersten Abständen nach §. 315. gleich sind, wodurch man nun leicht die gesuchten Abstandspunkte B_1 und B_2 erhält. Es haben, wie man sieht, zwei Punkte der Kugelfläche den nämlichen Rißpunkt.

Aus der Figur läßt sich übrigens leicht ein kürzeres Zeichnenverfahren einsehen, wenn man bedenkt, daß $ab = c'_1\ b'_1 = c'_2\ b'_2$ und sämmtliche Kreise dieselben und $aa' = aA$ ist. Ist Fig. 79 aA das Centrum der Kugel und b der angenommene Rißpunkt, so zieht man zuerst ab, macht ferner ac = ab und zieht $c\ c_1\ c_2$ parallel zu aA, so sind cc_1 und cc_2 die gesuchten Abstände.

b) Man nimmt einen Abstandspunkt B in Fig. 80. an, und sucht hiezu den Rißpunkt. Man zieht zu diesem Zwecke durch B eine Parallele zur Axe, erhält die Länge CD; mit dieser beschreibt man als Radius von a aus einen Kreis und zieht durch B eine Parallele zu Aaa, wodurch man b_1 und b_2 als Rißpunkte erhält. Also entsprechen demselben Abstandspunkt zwei verschiedene Oberflächepunkte.

§. 339. Die Durchschnittspunkte einer Geraden und einer Kugelfläche oder zwei Punkte zu finden, die auf einer gegebenen Geraden liegen und von einem gegebenen Punkt eine gegebene Entfernung haben.

Digitized by Google

Man denkt sich durch den Mittelpunkt der Kugel und die gegebene Gerade eine Hülfstafel gelegt, sucht sodann die neuen Risse des Mittelpunkts und der Geraden, zieht hierauf aus dem neuen Riß des Centrums als Mittelpunkt mit dem gegebenen Kugelradius als Halbmesser einen Kreis, bestimmt die Durchschnitte dieses und des zweiten Risses der Geraden und dieß sind dann die verlangten Punkte, die man nur noch auf die ursprüngliche Tafel zu beziehen hat. Beweis liegt in §. 194. Siehe Fig. 81., wo **A** das Centrum der Kugel und **BC** die gegebene Gerade bedeutet.

§. 340. Die Durchschnittsfigur einer gegebenen Kugelfläche und einer gegebenen Ebene zu finden.

Man sieht die gegebene Ebene als neue Tafel an, sucht den zweiten Riß und Abstand des Kugelcentrums. Hierauf construirt man sich ein rechtwinkliges Hülfsdreieck, in welchem der eben gefundene Abstand die eine Kathete und der Kugelradius die Hypotenuse sei, mit der anderen Kathete in diesem Dreieck als Radius und dem zweiten Riß des Kugelcentrums als Mittelpunkt construire man endlich einen Kreis, welcher der gesuchte Durchschnitt ist, den man nun zuletzt nur noch nach §. 320 auf die ursprüngliche Tafel zu beziehen hat. In Fig. 82. ist **A** das Kugelcentrum und **BCD** die Ebene. Beweis liegt in §. 194. und §. 195.

§. 341. Eine Ebene zu finden, welche zu einer gegebenen Ebene parallel ist, und eine gegebene Kugel berührt, oder eine Ebene zu finden, die zu einer gegebenen Ebene parallel ist, und von einem gegebenen Punkt einen bestimmten Abstand hat.

Man sieht die zu suchende Ebene als zweite Tafel an; von dieser weiß man nun

1) den Winkel, den sie mit der ersten Tafel macht, denn es ist dieß derjenige, welchen die gegebene Ebene mit ihr macht;
2) die Richtung der neuen Axe, denn dieselbe ist parallel zur Spur der gegebenen Ebene;
3) Von einem Punkt (nämlich dem Kugelmittelpunkt), sind endlich die Abstände zu beiden Tafeln bekannt.

Aus den Daten 1) und 3) sucht man mit Hülfe des §. 317c die beiden Rißentfernungen des Kugelcentrums und mit

Digitized by Google

der ersten Rißentfernung als Radius, construirt man dann aus dem ersten Riß, als Centrum, einen Kreis und zieht an diesen parallel zur Spur der gegebenen Ebene eine Tangente, welche die Kante der beiden Tafeln ist; hierauf sucht man den zweiten Riß des Kugelcentrums und dieser ist der Berührungspunkt der Tangentialebene, welchen man schließlich nur noch auf die erste Tafel zu beziehen hat. In Fig. 83. ist **A** das Centrum der gegebenen Kugel, **BCD** die gegebene Ebene und **E** der Berührungspunkt.

§. 342. Eine Ebene zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt der Kugelfläche geht und sie berührt.

Man sieht die zu suchende Ebene als zweite Tafel an und hat nun, da diese offenbar auf der Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit dem Kugelcentrum senkrecht steht, den Winkel der beiden Tafeln und von einem Punkt, dem Kugelcentrum, die beiden Abstände, woraus leicht nach §. 317c. die Rißentfernungen desselben zu suchen sind. Man construirt nun mit der ersten Rißentfernung des Kugelcentrums als Halbmesser und seinem ersten Riß als Mittelpunkt einen Kreis und an diesen senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Punkte eine Tangente, so ist diese die Spur der gesuchten Ebene, also diese selbst bestimmt, indem bereits schon der gegebene Punkt ein Punkt von ihr ist. In Fig. 84. ist **A** der Mittelpunkt der Kugel, **B** der Berührungspunkt und **BCD** die Ebene.

§. 343. Durch einen Punkt außerhalb einer Kugel eine Ebene zu legen, welche dieselbe berührt.

Diese Aufgabe kann in ähnlicher Weise, wie die vorhergehende, gelöst werden. Leicht ist aber auch die Richtigkeit folgender Lösung einzusehen.

Man sucht die Entfernung des gegebenen Punktes vom Centrum, construirt mit dieser als Hypotenuse und dem Kugelradius als Kathete ein rechtwinkliges Dreieck und dann bilden sämmtliche Geraden, die durch den Punkt gehen und mit der Verbindungslinie den spitzen Winkel machen, welcher im gefundenen rechtwinkligen Dreieck dem Kugelradius gegenüberliegt, einen Kegel und jede Berührungsebene an diesen, die nach §. 351. zu finden ist, ist eine gesuchte.

Digitized by Google

§. 344. Das Bild einer Cylinderfläche zu finden. Eine Gerade ist gegeben, man soll alle andern finden, die zu ihr parallel und um eine bestimmte Größe entfernt sind.

a) Die gegebene Gerade oder Cylinder-Axe steht auf der Tafel senkrecht. Dann zieht man von ihrem Riß aus, als Centrum, mit der gegebenen Größe als Radius einen Kreis und jeder Punkt desselben kann als Rißpunkt der Cylinderfläche angesehen werden, zu dem ein beliebiger Abstandspunkt gehört.

b) Die Cylinder-Axe steht schief auf der Tafel; dann nimmt man zuerst eine neue Tafel senkrecht zur Axe an und sucht den zweiten Riß des Cylinders. Diesen zweiten Riß bezieht man auf die erste Tafel, nun stellt jede Gerade, die einen Punkt des ersten Risses enthält und parallel zum Riß der Axe ist, die Rißgerade und jede Gerade, die durch den ersten Abstandspunkt eines Punktes des zweiten Risses geht und zu der Abstandsgeraden der Axe parallel ist, die Abstandsgerade einer Cylindergeraden vor; sucht man von sämmtlichen die ersten Spuren, so bilden dieselbe eine krumme Linie, die man Spur des Cylinders heißt. Gewöhnlich gibt man die Spur des Cylinders und die Richtung der Axe, wenn man einen Cylinder darstellen will.

§. 345. Ein Cylinder ist durch seine Spur und die Richtung der Axe gegeben; man soll zum Riß eines Cylinderflächenpunktes seinen Abstandspunkt finden.

Man zieht durch den Rißpunkt eine Parallele zur Rißgeraden der Axe und verlängert dieselbe bis zum Durchschnitt mit der Spur, welcher Durchschnitt selbst als Spur der Cylindergeraden anzusehen ist, auf welcher der zu suchende Punkt liegt, und es ist nun leicht zuerst die Abstandsgerade der genannten Cylindergeraden und darauf den gesuchten Abstandspunkt zu finden.

§. 346. Ein Cylinder ist durch seine Spur und die Richtung der Axe gegeben; man soll zum Abstandspunkt eines Punktes seiner Oberfläche den Riß finden.

Digitized by Google

Wird auf ähnliche Weise wie die vorhergehende Aufgabe gelöst.

§. 347. Den Schnitt eines Cylinders und einer Ebene zu finden.

Man sieht die Ebene als neue Tafel an und sucht die Spuren der Cylindergeraden mit dieser Tafel und bezieht dieselben schließlich wieder auf die alte Tafel.

§. 348. Zu einem durch seine Spur und Axe gegebenen Cylinder eine Tangentialebene finden, wenn ein Punkt derselben gegeben ist.

a) der gegebene Punkt ist ein Punkt der Cylinderfläche. Man sucht von der durch den Punkt gehenden Cylindergeraden die Spur und zieht durch diese eine Tangente an die Spur des Cylinders, welche letztere dann die Spur der gesuchten Ebene ist.

b) Der Punkt liegt außerhalb der Cylinderfläche; dann zieht man durch ihn zur Axe eine Parallele, sucht die Spur der letzteren und macht das Uebrige wie in a).

§. 349. Das Bild einer Kegelfläche zu finden, oder eine Gerade ist gegeben; man soll die Geraden finden, welche durch einen Punkt von ihr gehen und mit ihr einen bestimmten Winkel machen.

a) die gegebene Gerade oder Kegelaxe steht auf der Tafel senkrecht.

Man construirt zuerst mit dem Abstand als Kathete und dem gegebenen Winkel als anliegende Winkel ein rechtwinkeliges Dreieck; mit der erhaltenen zweiten Kathete construirt man als Radius von dem Rißpunkt des gegebenen Punktes als Centrum einen Kreis, welcher die Spur sämmtlicher Kegelgeraden vorstellt, wodurch diese selbst bestimmt sind.

b) Die gegebene Gerade oder Kegelaxe steht auf der Tafel nicht senkrecht.

Man nimmt eine zweite Tafel senkrecht zur Axe an,

Digitized by Google

sucht den zweiten Riß und Abstand des gegebenen Punktes und findet damit wie in a) die zweiten Spuren sämmtlicher Kegelgeraden. Wenn man dieselbe auf die erste Tafel bezieht, so findet man leicht auch die ersten Spuren des Kegelgeraden.

Gewöhnlich gibt man einen Kegel durch seine Spitze und erste Spur.

§. 350. Den Durchschnitt eines Kegels und einer Ebene zu finden.

Auflösung ganz so wie in §. 347.

§. 351. Ein Kegel ist durch Spitze und Spur gegeben; man soll eine Tangentialebene finden, die durch einen gegebenen Punkt geht.

a) der gegebene Punkt liegt auf der Kegelfläche.

Wird ganz so aufgelöst wie §. 348.

b) der gegebene Punkt liegt außer der Kegelfläche. Man zieht durch ihn und die Spitze des Kegels eine Gerade, sucht die Spur derselben und zieht durch diese eine Tangente an die Kegelspur, welche dann die Spur der gesuchten Ebene ist.

Kapitel V.

Aufgaben über das Dreikant und die eben begrenzten Körper.

§. 352. Ein Dreikant darzustellen, wenn seine Spitze und die drei Kantenwinkel gegeben sind.

Man sieht die Tafel als die Hülfsebene des §. 143 an, nimmt somit **OC** als den Abstand der Spitze, Punkt **C** als den Riß derselben und construirt endlich das Uebrige alles wie in §. 143.

Ebenso werden die übrigen fünf Aufgaben bezüglich des Dreikants mit Hülfe der §. 145, 147 und 151 leicht gelöst, und es bedarf hier keiner weitern Auseinandersetzung.

§. 353. Von einer Pyramide liege die Grundfläche in der Tafel und sei gegeben. Die Spitze sei durch den Riß- und Abstandspunkt bestimmt; man soll das Bild der Pyramide bestimmen.

Digitized by Google

Man verbindet die Eckpunkte der Basis mit dem Riß der Spitze und erhält dadurch die Rißgeraden der Seitenkanten und dadurch die Rißfigur der Pyramide; durch Verbindung der Abstandspunkte der Spitze und der der Basiseckpunkte ergibt sich die Abstandsfigur.

§. 354. Von einer Doppelpyramide oder einem Pyramidenstumpf findet man bei den Daten des vorigen Paragraphen, und wenn außerdem der Abstand der zweiten Basis von der ersten gegeben ist, sehr leicht das Bild, in dem man in der Abstandsfigur zuerst die zweite Basis (durch eine zur Are parallele Gerade) zeichnet, dadurch die Abstandspunkte der Eckpunkte der zweiten Basis und hieraus endlich deren Risse findet.

§. 355. Von einem pyramidalen Körper soll das Bild gefunden werden, wenn seine Basis in der Tafel gegeben ist und zwei an ein und derselben Seitenkanten liegenden Seitenflächen durch Zeichnungen bestimmt sind.

Es sei Fig. 85 **ABCD** die Basis in der Tafel, ferner **ABE′F′** und **ACE″G″** die gegebenen Seitenflächen, wo Seitenkante **AE′** in beiden dieselbe. Man hängt **ABE′F′** an **AB** und **ACE″G″** an **AC** so ist **E′F′** || **AB** und **E″G″** || **AC**, ferner **AE′** = **AE′**. Man kann nun die Seitenebenen **ABE′F′** als zweite Tafel ansehen, wo die Punkte **E′** und **F′** in in ihr liegend, gleichzeitig ihre zweiten Risse vorstellen. Vom Punkte **E′** liegt nun nach Kapitel **II.** der erste Riß in einer von **E′** aus auf **AB** senkrecht gezogenen Geraden **E′e**, da **AB** als Are angesehen werden kann. Ebenso kann aber auch diese Seitenebene **ACE″G″** als dritte Tafel angesehen werden, und deßhalb liegt der erste Riß von **E″** auch in einer auf **AC** senkrechten Geraden **E″e**. Also liegt der erste Riß von **E** im Punkt **e** und es ist **Ae** die Rißgerade der Seitenkante **AE**. Mittelst des Hülfsdreieckes **E′eE′**, wo eine Kathete **eE′** gleich erster Rißentfernung und Hypothenuse **E′E′** gleich zweiter Rißentfernung vom Punkt **E** ist, findet sich **eE′** als erster Abstand. Man kann somit leicht auch den Abstandspunkt **E** zu **e** finden.

Hieraus nun ergibt sich **Ae** als Abstandsgerade der Seitenkante **AE**.

Digitized by Google

Leicht sind nun die Abstandspunkte von F'G ꝛc. zu erhalten. Man ziehe ef parallel zu AB und Ff senkrecht darauf, so ist f der Riß und F der Abstandspunkt von F. Der Punkt S, wo sich AE und BF schneiden, ist die Spitze des pyramidalen Körpers, und folglich sind nun sämmtliche übrige Kanten bestimmt.

§. 356. Von einem Prisma ist die Grundfläche in der Tafel und zwei an einer Kante liegenden Seitenflächen gegeben, man soll das Bild des Prismas durch Zeichnung finden.

Man sucht, wie vorhin, zuerst das Bild einer Seitenkante und da nun alle übrigen Seitenkanten parallel zu dieser sind und von jeder ein Punkt bereits schon gegeben ist, so ist das Bild des Prismas selbst leicht zu finden.

§. 357. Um das Bild eines nkantigen Obelisken zu finden, müssen außer der Basis noch n—2 Seitenflächen gegeben sein, um ihn bildlich darzustellen. Die Bestimmung selbst aber geht dann in ähnlicher Weise, wie in den vorhergehenden Aufgaben, leicht vor sich.

§. 358. Bezüglich der Bilder von Körpern hat man sich noch einen zum deutlichen Verständniß derselben sehr wichtigen Punkt zu bemerken. Es ist nämlich leicht ersichtlich, daß einem jeden Rißpunkt, mit Ausnahme der, welche dem Umfang der Rißfigur entsprechen, zwei Oberflächenpunkte zugehören (für den Fall, daß der Körper aber hohl ist, sogar noch mehrere), — den einen der beiden Punkte, welcher der Tafel näher liegt, was man aus dem Abstande leicht entscheidet, nennt man den unsichtbaren, den andern den sichtbaren, indem man sich vorstellt, als betrachte ein noch weiter als der Körper von der Tafel entferntes Auge den letztern. Kanten oder Stücke desselben, welche sichtbare Punkte enthalten, werden auch sichtbare, die aber, welche unsichtbare enthalten, unsichtbare genannt. Erstere unterscheidet man in der Zeichnung von letzterer dadurch, daß man sie ganz zusammenhängend auszieht, die andern aber nur punktirt.

§. 359. Wenn von einem beliebigen gegebenen Körper, z. B. von einer Maschine, das Bild bestimmt werden soll, was man gemein hin das Aufnehmen desselben nennt, so hat man von gewissen hinreichend vielen und dem Zwecke gemäß gehörig ausge-

Digitized by Google

wählten Punkten die Riß- und Abstandspunkte zu bestimmen. Dieß kann aber geschehen:

1) Wenn man die Tafel horizontal nimmt, was sehr häufig der Fall ist, da die meisten Gegenstände auf einer horizontalen Tafel stehen, dadurch, daß man an den Punkt ein Senkel hält, dann ist der Fußpunkt des Senkels der Riß und seine Länge der Abstand des Punktes.

2) Man mißt die Entfernung **AB** des Punktes **A** von einer auf der Tafel senkrechten Ebene **BB**, zieht in der Tafel eine Gerade parallel zu der Ebene **BB** und um die gefundene Entfernung von ihr entfernt, alsdann bestimmt man noch die Entfernungen des angenommenen Punktes **A** von zwei Punkten **C** und **D** der gezogenen Geraden; hierauf construirt man in der Zeichentafel mit der Distanz der Punkte in der Geraden **CD** als eine Seite und den gefundenen zwei andern Entfernungen **AC** und **AD** das Dreieck **ACD**, zieht **AE** senkrecht auf **BC**, dann ist **E** der Riß und **AE** der Abstand des Punktes.

3) Man mißt die Entfernung des gegebenen Punktes **A** von drei beliebig in der Tafel angenommenen **B**, **C** und **D**. Aus den zwei ersten Punkten **B** und **C** Fig. 86 als Mittelpunkte angenommen, zieht man mit den entsprechenden Entfernungen als Radien zwei Kreise und verbindet dann die Punkte, in welche sich beide Kreise schneiden. Dann liegt der Riß des Punktes in dieser Verbindungslinie. Ebenso macht man es mit dem ersten Punct **B** und dritten Punkt **D** wodurch sich wieder eine Gerade ergibt, in welcher der Riß liegt, folglich ist er der Schnittpunkt a der beiden Verbindungsgeraden. Um noch den Abstand des gegebenen Punktes von der Tafel zu finden, construirt man mit der Länge a a' als Kathete und die Länge a' **A'** als Hypothenuse ein rechtwinkliges Dreieck, und in diesem stellt die erhaltene Kathete den gesuchten Abstand des Punktes vor. Der Beweis hiefür springt leicht in die Augen, wenn man sich Ebene **ABC** als zweite und Ebene **ABD** als dritte Tafel denkt.

Digitized by Google

Druckfehler.

Seite	14	Zeile	9 von unten	statt „in die Ebene“ lies „in der Ebene.“
—	15	—	16 von oben	statt „Schnittpunkt“ lies „Schnittpunkte.“
—	26	—	3 von unten	statt „mit OA“ lies „mit OB.“
—	26	—	6 von unten	statt „OA“ lies „OB.“
—	29	—	11 von oben	statt „der Seiten“ lies „der Seite.“
—	29	—	12 von unten	statt „Gerade schneidet“ lies „Gerade BD schneidet.“
—	29	—	8 von unten	statt „Ebenen“ lies „Ebene.“
—	41	—	2 von oben	statt „steht.“ lies „steht und den Punkt enthält.“
—	42	—	7 von unten	statt „schneidet,“ lies „schneidet und.“
—	57	—	2 von unten	statt „von C“ lies „von C′.“
—	63	—	1 von unten	statt „einer“ lies „einem.“
—	70	—	1 von oben	statt „Ecke“ lies „Ecken.“
—	76	—	4 von unten	statt „Ebene“ lies „Ecken.“
—	80	—	5 von unten	statt „AB —“ lies „BC —.“
—	128	—	16 von unten	statt „ein Quadratfuß“ ließ „einen Quadratzoll.“
—	149	—	4 von oben	statt „construirt ist;“ lies „construirt, sind.“
—	156	—	1 von oben	statt „darauf“ lies „auf ab.“
—	165	—	9 von unten	statt „Figur 62 ist A″c″″ lies „Fig. 61 ist a″c″.“
—	168	—	7 von unten	statt „B′c″ lies „B′C′.“
—	168	—	5 von unten	statt „BC“ lies „BC.“
—	171	—	5 von unten	statt „ACS“ lies „AB′S.“

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 67

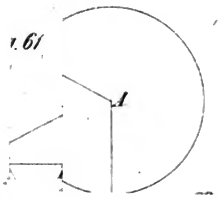
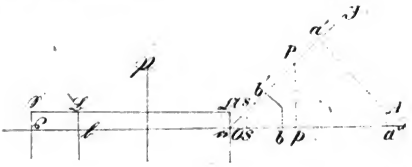


Fig. 68 S. 318



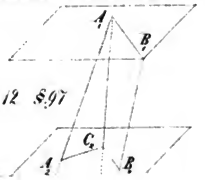
Digitized by Google

86 b

§. 86 c

Fig. 11

Fig. 12 §. 97



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google